Вариант 2

Задача 1. *Вычислить значение функции (ответ дать в алгебраической форме):*

а) $\mathrm{Arc}\cos 3$;   б) $\mathrm{Ln}(1-i)$

Решение. а). Будем вычислять Arccos3 по формуле $\mathrm{Arc}\cos(z) = -i\cdot \mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$. В данном примере z=3, следовательно, $\mathrm{Arc}\cos 3 = -i\cdot \mathrm{Ln}(3\pm\sqrt{8})$. Далее воспользуемся формулой $\mathrm{Ln}(z) = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)$. В данном случае у функции Ln(z) имеется два значения z: $z_1 = 3+\sqrt{8}$ и $z_2 = 3-\sqrt{8}$. Найдём модули и аргументы этих чисел:
$|z_1| = 3+\sqrt{8}$, $\varphi_1 = \arg z_1 = 0$, $|z_2| = 3-\sqrt{8}$, $\varphi_2 = \arg z_2 = 0$, так как $3-\sqrt{8} > 0$. Таким образом $\mathrm{Arc}\cos 3 = -i\cdot \mathrm{Ln}(3\pm\sqrt{8}) = -2k\pi - i\ln(3\pm\sqrt{8})$.

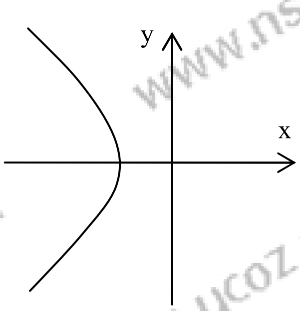
б). Воспользуемся формулой $\mathrm{Ln}(z) = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)$. В данном случае $z = 1-i$. Найдём модуль и аргумент этого числа: $|z| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ $\varphi = \arg z = \mathrm{arctg}\frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4}$ (четвёртая четверть). Таким образом $\mathrm{Ln}(1-i) = \ln(\sqrt{2}) + i(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi) = \ln(\sqrt{2}) + i\pi(2k-\frac{1}{4})$.

Ответ. а) $\mathrm{Arc}\cos 3 = 2k\pi - i\ln(3\pm\sqrt{8})$; б) $\mathrm{Ln}(1-i) = \ln\sqrt{2} + i\pi(2k-\frac{1}{4})$.

Задача 2. *Выяснить геометрический смысл соотношения. Сделать чертёж.*

$$|z-2| - |z+2| < 1.$$

Решение. Так как z=x+iy, то данное соотношение имеет вид: $|x-2+iy| - |x+2+iy| < 1$. Или $\sqrt{(x-2)^2+y^2} - \sqrt{(x+2)^2+y^2} < 1$. Перенесём второй корень в правую часть неравенства и возведём обе части в квадрат. Получим:



$x^2 - 4x + 4 + y^2 < 1 + 2\sqrt{(x+2)^2+y^2} + x^2 + 4x + 4 + y^2$. Или $2\sqrt{(x+2)^2+y^2} > -(1+8x)$. Отметим, что при 1+8x>0 данное неравенство выполняется всегда. Поэтому границу области, определяемой неравенством, нужно искать при 1+8x<0, т.е. x<-1/8. Возведём полученное равенство ещё раз в квадрат: $4x^2 + 16x + 16 + 4y^2 > 1 + 16x + 64x^2$. Или $60x^2 - 4y^2 < 15$. Поделив всё равенство на правую часть, получим : $4x^2 - \frac{4y^2}{15} < 1$.

Ответ. Данное соотношение представляет область, являющуюся внешней часть левой ветви гиперболы $4x^2 - \frac{4y^2}{15} = 1$(так как переменная x на границе области должна быть отрицательной).

Задача 3. *Решить уравнение*: $\sin z - \cos z = i$.

Решение. Перейдём к гиперболическим функциям: $\sin z = -i\cdot \mathrm{sh}(iz)$, $\cos z = \mathrm{ch}(iz)$.
Получим уравнение $-i\cdot \mathrm{sh}(iz) - \mathrm{ch}(iz) = i$. Или $-i\cdot\frac{1}{2}(e^{iz}-e^{-iz}) - \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}) = i$. Умножим уравнение на $2e^{iz}$. Тогда уравнение примет вид: $(1+i)e^{2iz} + 2ie^{iz} + 1 - i = 0$. Введём обозначение $V=e^{iz}$. Найдём корни квадратного уравнения $(1+i)V^2+2iV+1-i=0$:

$$V = \frac{-2i+\sqrt{(-2i)^2-4(1-i)(1+i)}}{2(1+i)} = \frac{-2i\pm i\cdot 2\sqrt{3}}{2(1+i)} = \frac{(-1\pm\sqrt{3})i}{1+i} = \frac{(-1\pm\sqrt{3})i(1-i)}{1^2-i^2} = \frac{(-1\pm\sqrt{3})(i+1)}{2}.$$

Таким образом, имеем два корня: $V_1 = \frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$, $V_2 = \frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$.

Найдём модули и аргументы этих чисел:

$$|V_1| = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_1 = \arg V_1 = \frac{\pi}{4}, \quad |V_2| = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_2 = \arg V_2 = \frac{5\pi}{4}.$$

Так как $V=e^{iz}$, то $iz=LnV$ или $z=-i\cdot LnV$. Далее воспользуемся формулой $LnV = \ln|V| + i(\varphi + 2k\pi)$. Получим:

$z_1 = -i \cdot LnV_1 = -i[\ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)] = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - i \cdot \ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$. Аналогично,

$z_2 = -i \cdot LnV_2 = -i[\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} + i(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi)] = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi - i \cdot \ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$.

Ответ. $z_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - i \cdot \ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi - i \cdot \ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$.

Задача 5. *Восстановить аналитическую функцию по заданной действительной части её:*

$$\mathrm{Re}\, f(z) = u = x^3 + 6x^2y + Axy^2 - 2y^3, \text{ если } f(0)=0.$$

Решение. Чтобы функция u(x,y) бала действительной частью аналитической функции нужно, чтобы она была гармонической, т.е. её лапласиан Δu был бы равен нулю: $\Delta u=0$, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Проверим выполнение этого условия, для чего найдём производные второго порядка от u по *x* и по *y*:

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 12xy + Ay^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x + 12y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2 + 2Axy - 6y^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2Ax - 12y$.

Чтобы лапласиан Δu был равен нулю, нужно положить A=-3. Таким образом, функция $u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ является гармонической. Восстановим мнимую часть v(x,y) функции f(z)=u(x,y)+iv(x,y), пользуясь условиями Даламбера-Эйлера: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Из первого условия получаем: $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 12xy - 3y^2$. Тогда $v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy + \varphi(x)$, или $v(x,y) = \int (3x^2 + 12xy - 3y^2) dy + \varphi(x) = 3x^2y + 6xy^2 - y^3 + \varphi(x)$. Производная по *x* от этого выражения равна $\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + 6y^2 + \varphi'(x)$. С другой стороны по второму условию Даламбера-Эйлера $\frac{\partial v}{\partial x} = -6x^2 + 6xy + 6y^2$. Приравнивая эти выражения, получим:

$6xy + 6y^2 + \varphi'(x) = -6x^2 + 6xy + 6y^2$. Отсюда $\varphi'(x) = -6x^2$. Или $\varphi(x) = -2x^3 + C$. Таким образом, $v(x,y) = 3x^2y + 6xy^2 - y^3 - 2x^3 + C$. Тогда

$f(z) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + i \cdot (3x^2y + 6xy^2 - y^3 - 2x^3 + C)$. Перейдём к переменной z:

$f(z) = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - 3iy^3 - 2i \cdot (x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 + C) = z^3(1-2i) + iC.$.

Воспользуемся дополнительным условием f(0)=0. В данном случае f(0)=iC. Следовательно, C=0.

Ответ. $f(z) = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - 3iy^3 - 2i \cdot (x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 + C) = z^3(1-2i)$.

Задача 6. *Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2.*

$$\int_C z \cdot \mathrm{Im}\, z\, dz; \quad C - \text{прямая}, \; z_1 = 0, \; z_2 = 2 + i.$$

Решение. Получим сначала уравнение прямой C: $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$, т.е. $y=\dfrac{x}{2}$. Вычислим интеграл, сводя его к криволинейным интегралам второго рода по формуле $\int\limits_C f(z)dz=\int\limits_C udx-vdy+i\int\limits_C udy+vdx$. В данном случае f(z)=(x+iy)y или $f(z)=xy+iy^2$. Значит

$\int\limits_C f(z)dz=\int\limits_C xydx-y^2dy+i\int\limits_C xydy+y^2dx$. Примем x за параметр. Тогда $y=\dfrac{x}{2}$, $dy=\dfrac{dx}{2}$.

Начальной точке z_1=0 соответствует значение x=0, конечной z_2=2+i – значение x=2.

Следовательно, $\int\limits_C z\cdot \operatorname{Im} z\,dz=\int\limits_0^2(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^2}{8})dx+i\int\limits_0^2(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^2}{4})dx=[\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^3}{24}]\Big|_0^2+i\dfrac{x^3}{6}\Big|_0^2=1+\dfrac{4i}{3}$.

Ответ. $\int\limits_C z\cdot \operatorname{Im} z\,dz=1+\dfrac{4i}{3}$.

Задача 7. *Вычислить интеграл от аналитической функции* $\int\limits_0^i z\cdot \operatorname{ch} z\,dz$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям:

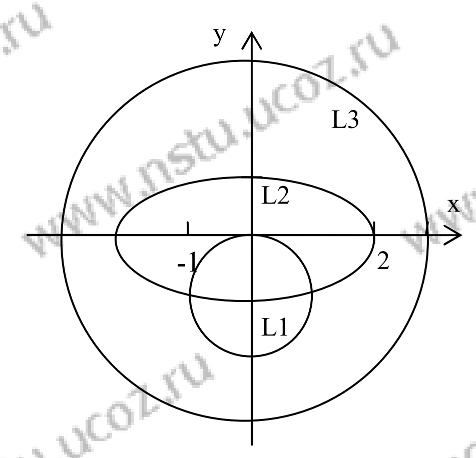
$$\int\limits_0^i z\cdot \operatorname{ch} z\,dz=\left|\begin{matrix}u=z & du=dz\\ dv=\operatorname{ch} z\,dz & v=\operatorname{sh} z\end{matrix}\right|=z\cdot\operatorname{sh} z\Big|_0^i-\int\limits_0^i \operatorname{sh} z\,dz=i\cdot\operatorname{sh} i-\operatorname{ch} z\Big|_0^i=i\cdot\operatorname{sh} i-\operatorname{ch} i+1$$

Перейдём к тригонометрическим функциям: $\operatorname{sh} i=i\sin 1$, $\operatorname{ch} i=\cos 1$. Получим:

$$\int\limits_0^i z\cdot \operatorname{ch} z\,dz=1-\sin 1-\cos 1.$$

Ответ. $\int\limits_0^i z\cdot \operatorname{ch} z\,dz=1-\sin 1-\cos 1$.

Задача 8. *Найти интеграл, используя интегральную формулу Коши, по контурам L_1, L_2, L_3.* $\int\limits_L \dfrac{(z^2+1)dz}{(z+1)(z-2)^2}$, 1) $L_1: |z+i|=1$, 2) $L_2: \dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$, 3) $L_3: |z|=3$.



Решение. 1). Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек z=-1 и z=2. В круге $|z+i|\le 1$ подынтегральная функция аналитична. Следовательно, $I_1=\int\limits_{L_1}\dfrac{(z^2+1)dz}{(z+1)(z-2)^2}=0$.

2). Внутри эллипса $\dfrac{(x+1^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}\le 1$ есть одна особая точка z=-1. Тогда по интегральной формуле Коши

$$I_2=\int\limits_{L_2}\frac{(z^2+1)dz}{(z+1)(z-2)^2}=\int\limits_{L2}\frac{\frac{z^2+1}{(z-2)^2}dz}{z+1}=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{z^2+1}{(z-2)^2}\right]_{z=-1}=\frac{4\pi i}{9}$$

3). Внутри области $|z|\le 3$ расположены обе особые точки. Поэтому применим теорему Коши для многосвязной области:

$$I_3=\int\limits_{L3}\frac{(z^2+1)dz}{(z+1)(z-2)^2}=\int\limits_{l_1}\frac{(z^2+1)dz}{(z+1)(z-2)^2}+\int\limits_{l_2}\frac{(z^2+1)dz}{(z+1)(z-2)^2}$$, где l_1 - окружность достаточно малого радиуса с центром в точке z=-1, а l_2 - окружность малого радиуса с центром в точке z=2. Первый интеграл в этой сумме совпадает с I_2. Вычислим второй интеграл по интегральной формуле Коши:

$$\int\limits_{l_2}\frac{(z^2+1)dz}{(z+1)(z-2)^2}=\int\limits_{l_2}\frac{\frac{z^2+1}{z+1}dz}{(z-2)^2}=\frac{2\pi i}{1!}\cdot\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2+1}{z+1}\right]_{z=2}=2\pi i\cdot\left[\frac{2z(z+1)-(z^2+1)}{(z+1)^2}\right]_{z=2}=\frac{14\pi i}{9}$$

. Тогда $I_3=\frac{4\pi i}{9}+\frac{14\pi i}{9}=2\pi i.$

<u>Ответ</u>. $I_1=0,\quad I_2=\frac{4\pi i}{9},\quad I_3=2\pi i.$

Задача 9. *Разложить функцию в ряд Лорана в областях.*

$\frac{z+2}{z^2-9z+20}$, 1) $4<|z|<5$ 2) $|z|>5$. 3) $1<|z-4|$.

<u>Решение</u>. Корнями уравнения z^2-9z+20=0 являются числа z_1=5 и z_2=4. Разложим эту дробь на простые дроби: $\frac{z+1}{z^2-9z+20}=\frac{A}{z-5}+\frac{B}{z-4}=\frac{A(z-4)+B(z-5)}{(z-5)(z-4)}$. Или

$A(z-4)+B(z-5)=z+2$. При z=5 получим A=7. Если положить z=4, то получим B=-6.

Следовательно, $\frac{z+2}{z^2-9z+20}=7\cdot\frac{1}{z-5}-6\cdot\frac{1}{z-4}$. 1). В кольце $4<|z|<5$ имеем

$\frac{4}{|z|}<1$ и $\frac{|z|}{5}<1$. Тогда дробь можно представить следующим образом:

$\frac{z+2}{z^2-9z+20}=7\cdot\frac{1}{5(1-\frac{z}{5})}-6\cdot\frac{1}{z(1-\frac{4}{z})}$. Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+...+q^n+...$, где $|q|<1$. В первой дроби q=z/5, во второй дроби q=4/z. Следовательно,

$\frac{z+2}{z^2-9z+20}=-6\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{z^n}+7\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}$. 2). В кольце $|z|>5$ выполняются неравенства

$\frac{4}{|z|}<1$ и $\frac{5}{|z|}<1$. Следовательно, $\frac{z+2}{z^2-9z+20}=7\cdot\frac{1}{z(1-\frac{5}{z})}-6\cdot\frac{1}{z(1-\frac{4}{z})}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7\cdot 5^{n-1}-6\cdot 4^{n-1}}{z^n}$.

3) $1<|z-4|\Rightarrow\frac{1}{|z-4|}<1;$

$$\frac{z+2}{z^2-9z+20}=\frac{7}{z-5}+\frac{-6}{z-4}=\frac{7}{(z-4)(1-\frac{1}{z-4})}-\frac{6}{z-4}=7\sum_1^{\infty}\frac{1}{(z-4)^{n+1}}-6\sum_1^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}$$

$$\frac{z+2}{z^2-9z+20}=7\sum_1^{\infty}\frac{1}{(z-4)^{n+1}}-6\sum_1^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}$$

<u>Ответ</u>. 1). $\frac{z+2}{z^2-9z+20}=-6\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{z^n}+7\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}$ в кольце $4<|z|<5$.

2). $\dfrac{z+2}{z^2-9z+20}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7\cdot 5^{n-1}-6\cdot 4^{n-1}}{z^n}$ в кольце $|z|>5$.

3) $\dfrac{z+2}{z^2-9z+20}=7\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1}{(z-4)^{n+1}}-6\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{z^n}{4^{n+1}}$ в кольце 1<|z-4|.

Задачи 10-11. *Вычислить интегралы с помощью вычетов.*

10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{2z+1}{(z^3-1)z}dz$ **11.** $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1}(z+3)^3\cos\frac{2}{z}dz$

Решение. **10.** Разложим подынтегральную функцию на простые дроби. Знаменатель представляется в виде $(z^3-1)z=z(z-1)(z^2+z+1)$. Следовательно,

$\dfrac{2z+1}{(z^3-1)z}=\dfrac{A}{z}+\dfrac{B}{z-1}+\dfrac{Cz+D}{z^2+z+1}$. Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители правой и левой части, получим: $A(z-1)(z^2+z+1)+Bz(z^2+z+1)+z(Cz+D)(z-1)=2z+1$. Полагая z=0, находим A=-1. Полагая z=1, находим B=1. Для определения C и B приравняем коэффициенты при z^3 и z^2 в правой и левой части равенства. Получим систему уравнений:

$\begin{cases}A+B+C=0\\ B-C+D=0\end{cases}$ Решая систему, находим: C=0, D=-1. Таким образом,

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{2z+1}{(z^3-1)z}dz=-\int\limits_{|z|=2}\frac{1}{z}dz+\int\limits_{|z|=2}\frac{1}{z-1}dz-\int\limits_{|z|=2}\frac{1}{z^2+z+1}dz=2\pi i(-1+1)-\int\limits_{|z|=2}\frac{1}{z^2+z+1}dz.$$

Два первых интеграла сразу вычислены по формуле Коши, третий интеграл найдём с помощью вычетов. Полюсами подынтегральной функции являются значения

$z_1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ и $z_2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Заметим, что $z_1-z_2=\sqrt{3}i$. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{1}{z^2-z+1}=\lim_{z\to z_1}[(z-z_1)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}]=\lim_{z\to z_1}\frac{1}{(z-z_2)}=\frac{1}{(z_1-z_2)}=\frac{1}{\sqrt{3}i}=-\frac{i}{\sqrt{3}}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z_2}\frac{1}{z^2+z+1}=\lim_{z\to z_2}[(z-z_2)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}]=\lim_{z\to z_2}\frac{1}{(z-z_1)}=\frac{1}{(z_2-z_1)}=\frac{1}{-\sqrt{3}i}=\frac{i}{\sqrt{3}}.$$ Получим окончательно:

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{2z+1}{(z^3-1)z}dz=2\pi i(-1+1)-2\pi i\sum_{k=1}^{2}\operatorname*{Res}_{z_i}\frac{1}{z^2+z+1}=-2\pi i\left(-\frac{i}{\sqrt{3}}+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)=0.$$

11. Подынтегральная функция имеет существенно особую точку z=0. Поэтому для вычисления вычета относительно этой точки следует разложить функцию в ряд Лорана. Воспользуемся разложением в ряд функции cos(w) по степеням w:

$\cos w=1-\dfrac{w^2}{2!}+\dfrac{w^4}{4!}-\dfrac{w^6}{6!}+\ldots$ Полагая $w=\dfrac{2}{z}$, найдём разложение данной функции:

$$(z+3)^3\cdot\cos\frac{2}{z}=(z+3)^3(1-\frac{2^2}{2z^2}+\frac{2^4}{24z^4}-\frac{2^6}{720z^6}+\ldots)=z^3+9z^2+27z+27-\frac{2(z^3+9z^2+27z+27)}{z^2}+$$

$$+\frac{2(z^3+9z^2+27z+27)}{3z^4}-\ldots=z^3+9z^2+25z+9-(54-\frac{2}{3})\frac{1}{z}-(54-18)\frac{1}{z^2}-\ldots=$$

$$=z^3+9z^2+25z+9-\frac{160}{3}\frac{1}{z}-36\frac{1}{z^2}-\ldots$$

Вычет данной функции равен коэффициенту при z^{-1} в данном разложении, т.е.

$\operatorname*{Res}_{0}[(z+3)^3\cos\dfrac{2}{z}]=-\dfrac{160}{3}$. Следовательно.

$$\int\limits_{|z-1|=1} (z+3)^3 \cos\frac{2}{z}dz = 2\pi i\cdot \operatorname*{Res}_0[(z+3)^3\cos\frac{2}{z}] = 2\pi i\cdot(-\frac{160}{3}) = -\frac{320}{3}\pi i.$$

Ответ. 10. $\int\limits_{|z|=2}\frac{2z+1}{(z^3-1)z}dz = 0.$ 11. $\int\limits_{|z-1|=1}(z+3)^3\cos\frac{2}{z}dz = -\frac{320}{3}\pi i.$

Задача 12. *Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{(x^4+10x^2+9)}dx.$$

Решение. В данном случае в верхней полуплоскости расположены два полюса z=i и z=3i. Функции $f(z)=\frac{z^2-z+2}{(z^4+10z^2+9)}=\frac{z^2-z+2}{(z^2+1)(z^2+9)}.$

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{(x^2+1)(x^2+9)}dx = 2\pi i(\operatorname*{Res}_i\frac{z^2-z+2}{(z^2+1)(z^2+9)}+\operatorname*{Res}_{3i}\frac{z^2-z+2}{(z^2+1)(z^2+9)}).$

$$\operatorname*{Res}_i\frac{z^2-z+2}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to i}\frac{(z-i)(z^2-z+2)}{(z+i)(z-i)(z^2+9)} = \frac{1-i}{2i(i^2+9)} = \frac{1-i}{2i\cdot 8} = \frac{1-i}{16i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{3i}\frac{z^2-z+2}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to 3i}\frac{(z-3i)(z^2-z+2)}{(z+3i)(z-3i)(z^2+1)} = \frac{-7-3i}{6i(9i^2+1)} = \frac{-7-3i}{-6i\cdot 8} = \frac{7+3i}{48i}.$$

Следовательно. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{(x^2+1)(x^2+9)}dx = 2\pi i(\frac{1-i}{16i}+\frac{7+3i}{48i}) = \frac{5\pi}{12}.$

Ответ. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{(x^2+1)(x^2+9)}dx = 2\pi i(\frac{1-i}{16i}+\frac{7+3i}{48i}) = \frac{5\pi}{12}.$

Задача 13. *Вычислить интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой C от точки z_1 до точки z_2.*

$\int\limits_C \ln z dz$, где C прямая, z_1=2-2i, z_2=-2-2i, $\ln(2-2i)=\ln\sqrt{8}-\frac{9}{4}\pi i$.

Решение. Рассмотрим функцию $\ln z = \ln|z| + i(\varphi+2k\pi).$ Рассматривается та ветвь функции, для которой в точке 2-2i величина lnz будет принимать заданное значение. С одной стороны $\ln(2-2i)=\ln\sqrt{8}+i(-\frac{\pi}{4}+2k\pi).$ С другой стороны $\ln(2-2i)=\ln\sqrt{8}-\frac{9}{4}\pi i$. Сравнивая эти выражения, приходим к выводу, что указанной ветви функции соответствует значение k=-1. Следовательно, данная ветвь функции имеет уравнение $\ln z=\ln|z|+i(\varphi-2\pi).$

Таким образом,

$$\int\limits_C \ln z dz = \begin{vmatrix} u=\ln z & du=\frac{dz}{z} \\ dv=dz & v=z\end{vmatrix} = z\ln z\Big|_{2-2i}^{-2-2i} - \int\limits_C dz = z(\ln z-1)\Big|_{2-2i}^{-2-2i} = (-2-2i)(\ln\sqrt{8}+i(-\frac{3\pi}{4}-2\pi)-1)-$$

$$-(2-2i)(\ln\sqrt{8}+i(-\frac{\pi}{4}-2\pi)-1) = -4\ln\sqrt{8}+4+\frac{3\pi i}{2}+4\pi i-\frac{3\pi}{2}-4\pi+\frac{\pi i}{2}+4\pi i+\frac{\pi}{2}+4\pi. =$$

$$= 4-\pi-6\ln 2+10\pi i.$$

Ответ. $\int\limits_C \ln z dz = 4-\pi-6\ln 2+10\pi i$.