Вариант 4

Задача 1. *Вычислить значение функции (ответ дать в алгебраической форме):*

$$\text{а)}\ \mathrm{Arctg}3; \qquad \text{б)}\ \mathrm{Ln}(-2i)$$

<u>Решение</u>. а). Вообще $\mathrm{Arctg}\,3 = \mathrm{arctg}\,3 + k\pi$. Найдём другие значения в комплексной плоскости. Будем вычислять Arctg3 по формуле $\mathrm{Arctg}(z) = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$. В данном примере z=3, следовательно, $\mathrm{Arctg}\,3 = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{1+3i}{1-3i} = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{(1+3i)^2}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{-4+3i}{5}$. Далее воспользуемся формулой $\mathrm{Ln}(z) = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)$. В данном случае $z = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$. Найдём модуль и аргумент этого числа: $|z| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 1, \quad \varphi = \arg z = \pi - \mathrm{arctg}\frac{3}{4}$. Таким образом $\mathrm{Arctg}\,3 = \frac{1}{2i}(\mathrm{Ln}(-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i) = \frac{1}{2i}[\ln(1) + i(\pi - \mathrm{arctg}\frac{3}{4} + 2k\pi)] = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{3}{4}$.

б). Воспользуемся формулой $\mathrm{Ln}(z) = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)$. В данном случае $z = -2i$. Найдём модуль и аргумент этого числа: $|z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2 \quad \varphi = \arg z = -\frac{\pi}{2}$. Таким образом

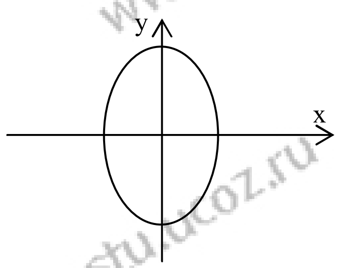
$\mathrm{Ln}(-2i) = \ln(2) + i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \ln(2) + i\pi(2k - \frac{1}{2})$.

<u>Ответ</u>. а) $\mathrm{Arctg}\,3 = (k + \frac{1}{2})\pi - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{3}{4}$; б) $\mathrm{Ln}(-2i) = \ln 2 + i\pi(2k - \frac{1}{2})$.

Задача 2. *Выяснить геометрический смысл соотношения. Сделать чертёж.*

$$|z + 2i| + |z - 2i| > 5$$

<u>Решение</u>. Так как z=x+iy, то данное соотношение имеет вид: $|x + i(y+2)| + |x + i(y-2)| > 5$.



Или $\sqrt{x^2 + (y+2)^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2} > 5$. Перенесём второй корень в правую часть равенства и возведём обе части в квадрат. Получим:

$x^2 + y^2 + 4y + 4 > 25 - 10\sqrt{x^2 + (y-2)^2} + x^2 + y^2 - 4y + 4$.

Или $10\sqrt{x^2 + (y-2)^2} > 25 - 8y$. Возведём ещё раз в квадрат: $100x^2 + 100y^2 - 400y + 400 > 625 - 400y + 64y^2$. Или $100x^2 + 36y^2 > 225$.

Поделив всё равенство на правую часть, получим каноническое уравнение эллипса с фокусами на мнимой оси: $\frac{4x^2}{9} + \frac{4y^2}{25} > 1$.

<u>Ответ</u>. Данное соотношение представляет внешнюю часть эллипса: $\frac{4x^2}{9} + \frac{4y^2}{25} > 1$.

Задача 3. *Решить уравнение*: $\sin z - \cos z = \frac{i}{2}$.

<u>Решение</u>. Перейдём к гиперболическим функциям: $\sin z = -i \cdot \mathrm{sh}(iz), \quad \cos z = \mathrm{ch}(iz)$.

Получим уравнение $-i \cdot \mathrm{sh}(iz) - \mathrm{ch}(iz) = \frac{i}{2}$. Или $-i \cdot \frac{1}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) - \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{i}{2}$. Умножим уравнение на $2e^{iz}$. Тогда уравнение примет вид: $(1+i)e^{2iz} + ie^{iz} + 1 - i = 0$. Введём обозначение $V=e^{iz}$. Найдём корни квадратного уравнения $(1+i)V^2+iV+1-i=0$:

$$V=\frac{-i+\sqrt{(-i)^2-4(1-i)(1+i)}}{2(1+i)}=\frac{-i\pm i\cdot 3}{2(1+i)}=\frac{(-1\pm 3)i}{2(1+i)}=\frac{(-1\pm 3)i(1-i)}{2(1^2-i^2)}=\frac{(-1\pm 3)(i+1)}{4}.$$

Таким образом, имеем два корня: $V_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$, $V_2=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$.

Найдём модули и аргументы этих чисел:

$$|V_1|=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \varphi_1=\arg V_1=\frac{\pi}{4},\quad |V_2|=\sqrt{2},\quad \varphi_2=\arg V_2=\frac{5\pi}{4}.$$

Так как $V=e^{iz}$, то $iz=\mathrm{Ln}V$ или $z=-i\cdot \mathrm{Ln}V$. Далее воспользуемся формулой $\mathrm{Ln}V=\ln|V|+i(\varphi+2k\pi)$. Получим: $z_1=-i\cdot \mathrm{Ln}V_1=-i[\ln\frac{1}{\sqrt{2}}+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)]=\frac{\pi}{4}+2k\pi+i\cdot\ln\sqrt{2}$.

Аналогично,

$z_2=-i\cdot \mathrm{Ln}V_2=-i[\ln(\sqrt{2})+i(\frac{5\pi}{4}+2k\pi)]=\frac{5\pi}{4}+2k\pi-i\cdot\ln(\sqrt{2})$.

Эти выражения можно объединить: $z_{1,2}=-\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\pm i\cdot\ln\sqrt{2}$

Ответ. $z_{1,2}=-\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\pm i\cdot\ln\sqrt{2}$.

Задача 5. *Восстановить аналитическую функцию по заданной действительной части её:*

$\operatorname{Re} f(z)=u=e^{2x}\cdot(x\cos 2y-y\sin 2y)$, *если* $f(0)=0$.

Решение. Чтобы функция $u(x,y)$ бала действительной частью аналитической функции нужно, чтобы она была гармонической, т.е. её лапласиан Δu был бы равен нулю: $\Delta u=0$, $\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Проверим выполнение этого условия, для чего найдём производные второго порядка от u по *x* и по *y*:

$\frac{\partial u}{\partial x}=2e^{2x}(x\cos 2y-y\sin 2y)+e^{2x}\cos 2y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2e^{2x}[2(x\cos 2y-y\sin 2y)+2\cos 2y]$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{2x}(-2x\sin 2y-\sin 2y-2y\cos 2y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{2x}[-4x\cos 2y-2\cos 2y+4y\sin 2y]$,

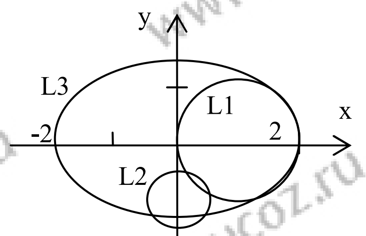
Таким образом, лапласиан Δu равен нулю. Восстановим мнимую часть $v(x,y)$ функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, пользуясь условиями Даламбера-Эйлера: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

Из первого условия получаем: $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2e^{2x}(x\cos 2y-y\sin 2y)+e^{2x}\cos 2y$. Тогда

$v(x,y)=\int\frac{\partial v}{\partial y}dy+\varphi(x)$, или $v(x,y)=\int(2e^{2x}(x\cos 2y-y\sin 2y)+e^{2x}\cos 2y)dy+\varphi(x)=$

$=e^{2x}(x\sin 2y+\frac{1}{2}\cos 2y+y\cos 2y-\frac{1}{2}\cos 2y)+\varphi'(x)=e^{2x}(x\sin 2y+y\cos 2y)+\varphi(x)$. Производная по *x* от этого выражения равна $\frac{\partial v}{\partial x}=e^{2x}(2x\sin 2y+2y\cos 2y+\sin 2y)+\varphi'(x)$. С другой стороны по второму условию Даламбера-Эйлера

$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-e^{2x}(-2x\sin 2y-\sin 2y-2y\cos 2y)$. Приравнивая эти выражения, получим: $\varphi'(x)=0$. Отсюда $\varphi(x)=C$. Таким образом, $v(x,y)=e^{2x}(x\sin 2y+y\cos 2y)+C$. Тогда $f(z)=e^{2x}\cdot(x\cos 2y-y\sin 2y)+i\cdot(e^{2x}(x\sin 2y+y\cos 2y)+C)$. Перейдём к переменной z:



$$f(z)=e^{2x}\cdot[x(\cos 2y+i\sin 2y)+y(i^2\sin 2y+i\cos 2y)]+iC)=e^{2x}\cdot[xe^{2iy}+iy$$
$$=e^{2x}\cdot e^{2iy}(x+iy]+iC=e^{2x+2iy}z+iC=z\cdot e^{2z}+iC.$$

Воспользуемся дополнительным условием f(0)=i. В данном случае f(0)=0. Т.е. C=0.

Ответ.
$$f(z)=e^{2x}\cdot(x\cos 2y-y\sin 2y)+i\cdot e^{2x}(x\sin 2y+y\cos 2y)=z\cdot e^{2z}.$$

Задача 6. *Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2.*

$$\int_C (i-\bar{z})\,dz;\qquad C-\text{прямая},\quad z_1=0,\ z_2=-1-i.$$

Решение. Вычислим интеграл, сводя его к криволинейным интегралам второго рода по формуле $\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C udy+vdx$. В данном случае f(z)=[i-(x-iy)] или

$f(z)=-x-(y-1)i.$ Значит $\int_C f(z)dz=-\int_C xdx-(y-1)dy-i\int_C xdy+(y-1)dx$. Примем x за параметр.

Составим уравнение прямой , по которой проводится интегрирование: $\frac{y}{-1}=\frac{x}{-1}$, т.е. y=x

Тогда dy=dx. Начальной точке z_1=0 соответствует значение x=0, конечной z_2=-1-i – значение x=-1.

Следовательно,

$$\int_C (i-\bar{z})\,dz=-\int_0^{-1}(x-(x-1)dx+i\int_0^{-1}(x+(x-1))dx=-[\frac{x^2}{2}-\frac{(x-1)^2}{2}]\Bigg|_0^{-1}-i(\frac{x^2}{2}+\frac{(x-1)^2}{2})\Bigg|_0^{-1}=-i.$$

Ответ. $\int_C (1-\bar{z})\cdot dz=-i$.

Задача 7. *Вычислить интеграл от аналитической функции* $\int_0^i z\cdot\sin z\,dz$.

Решение. Применим формулу формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^i z\cdot\sin z\,dz=\begin{vmatrix}u=z & du=dz\\ dv=\sin z\,dz & v=-\cos z\end{vmatrix}=-z\cdot\cos z\Big|_0^i+\int_0^i\cos z\,dz=-i\cdot\cos i+\sin z\Big|_0^i=-i\cdot\cos i+\sin i$$

Перейдём к гиперболическим функциям: $\sin i=i\text{sh}1,\quad \cos i=\text{ch}1$. Получим:

$\int_0^i z\cdot\sin z\,dz=-i(\text{ch}1-\text{sh}1)=-i\cdot e^{-1}$., так как sh1+ch1=e.

Ответ. $\int_0^i z\cdot\sin z\,dz=-i\cdot e^{-1}$.

Задача 8. *Найти интеграл, используя интегральную формулу Коши, по контурам L_1, L_2, L_3.* $\int_L\frac{\sin 2z dz}{(z+i)(z-\frac{i}{2})^2}$, 1) $L_1: |z-1|=1$, 2) $L_2: |z+i|=\frac{1}{2}$, 3) $L_3: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

Решение. 1). Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек z=-i и z=i/2. В круге $|z-1|\le 1$ нет особых точка. Тогда по теореме Коши I_1=0.

2). Внутри области $|z+i| \le \frac{1}{2}$ расположена одна особая точка z=-i. Тогда по интегральной формуле Коши : $I_2 = \int\limits_L \frac{\sin 2z dz}{(z+i)(z-\frac{i}{2})^2} = \int\limits_{L_2} \frac{\frac{\sin 2z}{(z-i/2)^2} dz}{(z+i)} = 2\pi i \cdot \left[\frac{\sin 2z}{(z-i/2)^2} \right]_{z=-i} =$

$= \frac{2\pi i \cdot 4\sin(-2i)}{-9} = -\frac{8\pi \cdot \operatorname{sh}2}{9}$.

3) Внутри эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \le 1$ находится две особых точки: z=-i и z=i/2. Поэтому применим теорему Коши для многосвязной области:

$I_3 = \int\limits_{L_3} \frac{\sin 2z dz}{(z+i)(z-\frac{i}{2})^2} = \int\limits_{l_1} \frac{\sin 2z dz}{(z+i)(z-\frac{i}{2})^2} = \int\limits_{l_2} \frac{\sin 2z dz}{(z+i)(z-\frac{i}{2})^2}$, где l_1 - окружность достаточно малого радиуса с центром в точке z=-i, а l_2 - окружность малого радиуса с центром в точке z=i/2. Первый интеграл в этой сумме совпадает с I_2. Вычислим второй интеграл по интегральной формуле Коши:

$$\int\limits_{L_3} \frac{\sin 2z dz}{(z+i)(z-\frac{i}{2})^2} = \int\limits_{L_3} \frac{\frac{\sin 2z dz}{(z+i)} dz}{(z-\frac{i}{2})^2} = \frac{2\pi i}{1!} \cdot \frac{d}{dz}\left[\frac{\sin 2z dz}{(z+i)} \right]_{z=i/2} = \frac{2\pi i}{1!} \cdot \left[\frac{2\cos 2z \cdot (z+i) - \sin 2z}{(z+i)^2} \right]_{z=i/2} =$$

$= 2\pi i \cdot \frac{4(3i\cos i - \sin i)}{-9} = \frac{8\pi(3\operatorname{ch}1 - \operatorname{sh}1)}{9}$. Тогда

$I_3 = -\frac{8\pi \cdot \operatorname{ch}2}{9} + \frac{8\pi e(3\operatorname{ch}1 - \operatorname{sh}1)}{9} = \frac{8\pi}{9}(3\operatorname{ch}1 - \operatorname{sh}1 - \operatorname{sh}2)..$

<u>Ответ</u>. $I_1 = 0,\quad I_2 = -\frac{8\pi \cdot \operatorname{sh}2}{9},\quad I_3 = \frac{8\pi}{9}(3\operatorname{ch}1 - \operatorname{sh}1 - \operatorname{sh}2)..$

Задача 9. *Разложить функцию в ряд Лорана в областях.*

$\frac{z-4}{z^2-8z+15}$, 1) $3 < |z| < 5$ 2) $|z| > 5$. 3) $0<|z-5|<2$.

<u>Решение</u>. Корнями уравнения z^2-8z+15=0 являются числа z_1=5 и z_2=3. Разложим эту дробь на простые дроби: $\frac{z-4}{z^2-9z+15} = \frac{A}{z-5} + \frac{B}{z-3} = \frac{A(z-3)+B(z-5)}{(z-5)(z-3)}$. Или

$A(z-3)+B(z-5) = z-4$. При z=5 получим A=1/2. Если положить z=3, то получим B=1/2.

Следовательно, $\frac{z-4}{z^2-9z+15} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-3}$. 1). В кольце $3 < |z| < 5$ имеем

$\frac{3}{|z|} < 1$ и $\frac{|z|}{5} < 1$. Тогда дробь можно представить следующим образом:

$\frac{z-4}{z^2-9z+15} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5(1-\frac{z}{5})} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{3}{z})}$. Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + ... + q^n + ...$, где $|q| < 1$. В первой дроби q=z/5, во второй дроби q=3/z. Следовательно,

$\frac{z-4}{z^2-9z+15}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}$. 2). В кольце $|z|>5$ выполняются неравенства $\frac{3}{|z|}<1$ и $\frac{5}{|z|}<1$. Следовательно,

$$\frac{z-4}{z^2-9z+15}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{5}{z})}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{3}{z})}=\frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{z^n}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}=\frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}+3^{n-1}}{z^n}.$$

3) $0<|z-5|<2\Rightarrow\frac{|z-5|}{2}<1;$

$$\frac{z-4}{z^2-8z+15}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2(1-(-\frac{z-5}{2}))}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-5}=\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-5)^n}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}};$$

$$\frac{z-4}{z^2-8z+15}=\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-5)^n}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}};$$

Ответ. 1). $\frac{z-4}{z^2-9z+15}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}$. в кольце $3<|z|<5$.

2). $\frac{z-4}{z^2-9z+15}=\frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}+3^{n-1}}{z^n}$ в кольце $|z|>5$.

3) $\frac{z-4}{z^2-8z+15}=\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-5)^n}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}};$ в кольце 0<|z-5|<2.

Задачи 10-11. *Вычислить интегралы с помощью вычетов.*

10. $\int\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{sh}(z-1)}{(z^2-1)^2}dz$ **11.** $\int\limits_{|z|=2}(2z+1)\sin\frac{z-1}{z}dz$

Решение. **10.**. Значения $z_1=1$ и $z_2=-1$ являются полюсами подынтегральной функции кратности 2. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{\operatorname{sh}(z-1)}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}[(z-1)^2\frac{\operatorname{sh}(z-1)}{(z-1)^2(z+1)^2}]=\lim_{z\to1}\frac{\operatorname{ch}(z-1)\cdot(z+1)^2-\operatorname{sh}(z-1)\cdot2(z+1)}{(z+1)^4}=$$

$=\frac{4\operatorname{ch}(0)-4\cdot\operatorname{sh}(0)}{16}=\frac{1}{4}$. Здесь учтено, что ch(0)=1, а sh(0)=0.

$$\operatorname*{Res}_{z_2}\frac{\operatorname{sh}(z-1)}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}[(z+1)^2\frac{\operatorname{sh}(z-1)}{(z-i)^2(z+1)^2}]=\lim_{z\to-1}\frac{\operatorname{ch}(z-1)\cdot(z-1)^2-\operatorname{sh}(z-1)\cdot2(z-1)}{(z-1)^4}=$$

$=\frac{4\operatorname{ch}(-2)+4\cdot\operatorname{sh}(-2)}{16}=\frac{\operatorname{ch}(-2)+\operatorname{sh}(-2)}{4}=\frac{1}{4}e^{-2}$. Здесь учтено, что $\operatorname{ch}(z)+\operatorname{sh}(z)=e^z$. Получим окончательно:

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{sh}(z-1)\pi}{(z^2-1)^2}dz=2\pi i(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2})=\frac{1}{2}\pi i(1+e^{-2}).$$

11. Подынтегральная функция имеет существенно особую точку z=0. Поэтому для вычисления вычета относительно этой точки следует разложить функцию в ряд Лорана. По формуле для синуса суммы получим: $(2z+1)\sin\frac{z-1}{z}=(2z+1)(\sin1\cos\frac{1}{z}-\cos1\sin\frac{1}{z})$.

Воспользуемся разложением в ряд функций sin(w) и cos(w) по степеням w:

$\sin(w)=w-\frac{w^3}{3!}+\frac{w^5}{5!}-\frac{w^7}{7!}+...,\quad \cos(w)=1-\frac{w^2}{2!}+\frac{w^4}{4!}-\frac{w^6}{6!}+...$ Полагая $w=\frac{1}{z}$, получим:

$$(2z+1)\sin\frac{z-1}{z}=(2z+1)\left[\sin 1\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+...\right)-\cos 1\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^3}-\frac{1}{5!z^5}+...\right)\right]$$

В первом ряде коэффициентом при z^{-1} с учётом множителя (2z+1) будет (-sin1), во втором – ($-\cos 1$). Следовательно, коэффициентом при z^{-1} в разложении функции будет $-(\sin 1+\cos 1)$.

Вычет данной функции равен коэффициенту при z^{-1} в данном разложении, т.е.

$\operatorname{Res}_0[(2z+1)\sin\frac{z-1}{z}]=-(\sin 1+\cos 1)$. Следовательно.

$$\int\limits_{|z|=2}(2z+1)\sin\frac{z-1}{z}dz=2\pi i\cdot\operatorname{Res}_0[(2z+1)\sin\frac{z-1}{z}]=-2\pi i\cdot(\sin 1+\cos 1).$$

<u>Ответ</u>. 10. $\int\limits_{|z|=2}\frac{sh(z-1)\pi}{(z^2-1)^2}dz=\frac{1}{2}\pi i(1+e^{-2})$. 11. $\int\limits_{|z|=2}(2z+1)\sin\frac{z-1}{z}dz=-2\pi i\cdot(\sin 1+\cos 1)$.

Задача 12. *Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{(x^4+1)}dx.$$

<u>Решение</u>. Найдём корни знаменателя функции $f(z)=\frac{z^2+1}{(z^4+1)}$:

$z^4+1=0$ или $z=|-1|(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4})$ или $z_{1,2,3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)$. Следовательно,

два корня из четырёх находятся в верхней полуплоскости:

$z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ и $z_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$.

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{(x^4+1)}dx=2\pi i(\operatorname{Res}_{z_1}\frac{z^2+1}{(z^4+1)}+\operatorname{Res}_{z_3}\frac{z^2+1}{(z^4+1)})$.

$$\operatorname{Res}_{z_1}\frac{z^2+1}{(z^4+1)}=\lim_{z\to\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}\frac{(z-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))(z^2+1)}{(z+\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))(z+\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i))(z-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))(z-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i))}=$$

$$=\frac{i+1}{\sqrt{2}(i+1)\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}i}=\frac{1}{2\sqrt{2}i}.$$

$$\operatorname{Res}_{z_1}\frac{z^2+1}{(z^4+1)}=\lim_{z\to-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)}\frac{(z+\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i))(z^2+1)}{(z+\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))(z+\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i))(z-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))(z-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i))}=$$

$$\frac{-i+1}{\sqrt{2}i\cdot(-\sqrt{2})[-\sqrt{2}(1-i)]}=\frac{1}{2\sqrt{2}i}.$$

Следовательно. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{(x^4+1)}dx=2\pi i(\operatorname{Res}_{z_1}\frac{z^2+1}{(z^4+1)}+\operatorname{Res}_{z_3}\frac{z^2+1}{(z^4+1)})=2\pi i\left(\frac{1}{2\sqrt{2}i}+\frac{1}{2\sqrt{2}i}\right)=\sqrt{2}\pi.$

<u>Ответ</u>. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{(x^4+1)}dx=\pi\sqrt{2}.$

Задача 13. *Вычислить интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой C от точки z_1 до точки z_2.*

$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z+1}}$, где C: $y=x^3-4x$, $z_1=-2$, $z_2=2$, $\sqrt{-1}=-i$.

Решение. Точки z_1 и z_2 не являются особыми точками для подинтегральной функции. Следовательно, можно применить формулу Ньютона-Лейбница:

$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z+1}} = 2\sqrt{z+1}\Big|_{z_1}^{z_2} = 2(\sqrt{z_2+1}-\sqrt{z_1+1})$. Рассмотрим функцию

$\sqrt{z+1}=\sqrt{|z+1|}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2})$. Рассматривается та ветвь функции, для которой в точке z=-2 функция будет принимать заданное значение. С одной стороны

$\sqrt{-2+1}=\sqrt{-1}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}$. С другой стороны

$\sqrt{-2+1}=\sqrt{-1}=-i=\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})$. Сравнивая эти выражения, приходим к выводу, что указанной ветви функции соответствует значение k=1. Следовательно, данная ветвь функции имеет уравнение $\sqrt{z+1}=\sqrt{|z+1|}(\cos\frac{\varphi+2\pi}{2}+i\sin\frac{\varphi+2\pi}{2})$.

Таким образом, $\sqrt{z_1+1}=\sqrt{-2+1}=\sqrt{-1}=\sqrt{1}(\cos\frac{\pi+2\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{2})=-i$,

$\sqrt{z_2+1}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}=\sqrt{3}(\cos\frac{2\pi}{2}+i\sin\frac{2\pi}{2})=-\sqrt{3}$. Следовательно,

$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z+1}} = 2\sqrt{z+1}\Big|_{z_1}^{z_2} = 2(\sqrt{z_2+1}-\sqrt{z_1+1}) = 2(-\sqrt{3}+i)$.

Ответ. $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z+1}} = 2(-\sqrt{3}+i)$.