Вариант 5

Задача 1. *Вычислить значение функции (ответ дать в алгебраической форме):*

$$\text{а)}\quad \cos(3+i); \qquad \text{б)}\quad \ln(-3+4i)$$

<u>Решение</u>. а). По формуле тригонометрии cos(3+i)=cos3·cos(i)-sin3·sin(i). Воспользуемся формулами связи между тригонометрическими и гиперболическими функциями: cos(i)=ch1; sin(i)= ish1. Получим cos(3+i)=cos3·ch1- i·sin3·sh1.

б). Воспользуемся формулой $\mathrm{Ln}(z) = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)$. В данном случае $z = -3 + 4i$. Найдём модуль и аргумент этого числа: $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \quad \varphi = \arg z = \pi - \mathrm{arctg}\frac{4}{3}$ (вторая четверть).

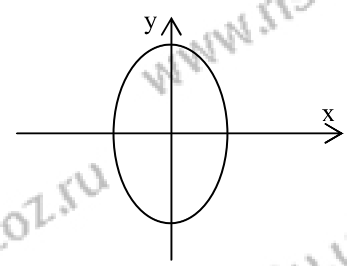
Таким образом $\mathrm{Ln}(-3+4i) = \ln 5 + i(2k\pi + \pi - \mathrm{arctg}\frac{4}{3})$.

<u>Ответ</u>. а) cos(3+i)=cos3·ch1- i·sin3·sh1; б) $\mathrm{Ln}(-3+4i) = \ln 5 + i(2k\pi + \pi - \mathrm{arctg}\frac{4}{3})$.

Задача 2. *Выяснить геометрический смысл соотношения. Сделать чертёж.*

$$|z+2i| + |z-2i| < 5$$

<u>Решение</u>. Так как z=x+iy, то данное соотношение имеет вид: $|x + i(y+2)| + |x + i(y-2)| > 5$.



Или $\sqrt{x^2 + (y+2)^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2} < 5$. Перенесём второй корень в правую часть равенства и возведём обе части в квадрат. Получим:

$$x^2 + y^2 + 4y + 4 < 25 - 10\sqrt{x^2 + (y-2)^2} + x^2 + y^2 - 4y + 4.$$

Или $10\sqrt{x^2 + (y-2)^2} < 25 - 8y$. Возведём ещё раз в квадрат: $100x^2 + 100y^2 - 400y + 400 < 625 - 400y + 64y^2$. Или $100x^2 + 36y^2 < 225$.

Поделив всё равенство на правую часть, получим каноническое уравнение эллипса с фокусами на мнимой оси: $\frac{4x^2}{9} + \frac{4y^2}{25} < 1$.

<u>Ответ</u>. Данное соотношение представляет внутреннюю часть эллипса: $\frac{4x^2}{9} + \frac{4y^2}{25} < 1$.

Задача 3. *Решить уравнение*: $\mathrm{sh}\, z - \mathrm{ch}\, z = 2i$.

<u>Решение</u>. Перейдём к показательной функции:

$\frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) - \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = 2i$. Умножим уравнение на $2e^z$. Тогда уравнение примет вид:

$(e^{2z} - 1) - (e^{2z} + 1) = 4ie^z \quad$ или $\quad e^z = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}$. Отсюда $z = \mathrm{Ln}\frac{i}{2} = \ln\frac{1}{2} + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$.

<u>Ответ</u>. $z = (2k + \frac{1}{2})\pi i - \ln\sqrt{2}$.

Задача 5. *Восстановить аналитическую функцию по заданной действительной части её:*

$$\mathrm{Re}\, f(z) = u = e^x \cdot (x\cos y - y\sin y), \text{ *если* } f(0)=0.$$

<u>Решение</u>. Чтобы функция u(x,y) бала действительной частью аналитической функции нужно, чтобы она была гармонической, т.е. её лапласиан Δu был бы равен нулю: Δu=0,

$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Проверим выполнение этого условия, для чего найдём производные второго порядка от u по *x* и по *y*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x\cos y - y\sin y) + e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x[(x\cos y - y\sin y) + \cos y],$$

$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x[-x\cos y - \cos y + y\sin y],$

Таким образом, лапласиан Δu равен нулю. Восстановим мнимую часть $v(x,y)$ функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, пользуясь условиями Даламбера-Эйлера: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$

Из первого условия получаем: $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x\cos y - y\sin y) + e^x\cos y$. Тогда

$v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial y}dy + \varphi(x)$, или $v(x,y) = \int (e^x(x\cos y - y\sin y) + e^x\cos y)dy + \varphi(x) =$

$= e^x(x\sin y + \cos y + y\cos y - \cos y) + \varphi'(x) = e^x(x\sin y + y\cos y) + \varphi(x)$. Производная по *x* от этого выражения равна $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x(x\sin y + y\cos y + \sin y) + \varphi'(x).$ С другой стороны по второму условию Даламбера-Эйлера $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y).$ Приравнивая эти выражения, получим: $\varphi'(x) = 0.$ Отсюда $\varphi(x) = C.$ Таким образом,

$v(x,y) = e^x(x\sin y + y\cos y) + C.$ Тогда $f(z) = e^x \cdot (x\cos y - y\sin y) + i\cdot(e^x(x\sin y + y\cos y) + C).$

Перейдём к переменной z:

$f(z) = e^x \cdot [x(\cos y + i\sin y) + y(i^2\sin y + i\cos y)] + iC) = e^x \cdot [xe^{iy} + iye^{iy}] + iC =$

$= e^x \cdot e^{iy}(x + iy] + iC = e^{x+iy}z + iC = z\cdot e^z + iC$.Воспользуемся дополнительным условием $f(0)=i$. В данном случае $f(0)=0$. Т.е. $C=0$.

Ответ. $f(z) = e^x \cdot (x\cos y - y\sin y) + i\cdot e^x(x\sin y + y\cos y) = z\cdot e^z.$

Задача 6. *Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2.*

$$\int_C (1 + i + \bar{z})\,dz; \qquad C - \text{прямая}, \quad z_1 = 0, \; z_2 = -4 - 2i.$$

Решение. Вычислим интеграл, сводя его к криволинейным интегралам второго рода по формуле $\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx$. В данном случае $f(z)=[1+i+(x-iy)]$ или

$f(z) = 1 + x + (1-y)i.$ Значит $\int_C f(z)dz = \int_C (1+x)dx - (1-y)dy + i\int_C (1+x)dy + (1-y)dx$. Примем x за параметр. Составим уравнение прямой , по которой проводится интегрирование: $\frac{y}{-2} = \frac{x}{-4}$,

т.е. $y = \frac{1}{2}x, \quad dy = \frac{1}{2}dx$. Начальной точке $z_1=0$ соответствует значение $x=0$, конечной $z_2=-4-2i$ – значение $x=-4$.

Следовательно,

$$\int_C (1+i+\bar{z})\,dz = \int_0^{-4}[(1+x) - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}x)]dx + i\int_0^{-4}[\frac{1}{2}(1+x) + (1 - \frac{1}{2}x)]dx = [\frac{x}{2} + \frac{5}{4}\frac{x^2}{2}]\Big|_0^{-4} + i\frac{3x}{2}\Big|_0^{-4} = 8 - 6i.$$

Ответ. $\int_C (1+i+\bar{z})\,dz = 8 - 6i$.

Задача 7. *Вычислить интеграл от аналитической функции.* $\int_{1-i}^{i-1}(2z+3)dz$.

Решение. Применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_{1-i}^{i-1}(2z+3)dz = (z^2 + 3z)\Big|_{1-i}^{i-1} = (i-1)^2 + 3(i-1) - (1-i)^2 - 3(1-i) = -2i + 3i - 3 + 2i - 3 + 3i = 6(i-1).$$

Ответ. $\int\limits_{1-i}^{i-1}(2z+3)dz = 6(i-1)$.

Задача 8. *Найти интеграл, используя интегральную формулу Коши, по контурам L_1, L_2, L_3.* $\int\limits_L \frac{\cos z dz}{z^3-\pi z^2}$, 1) $L_1: |z-i| = \frac{1}{2}$, 2) $L_2: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, 3) $L_3: (x-3)^2+\frac{(y-1)^2}{4}=1$.

Решение. 1). Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек z=0 и z=π. В круге $|z-i| \le \frac{1}{2}$ нет особых точка. Тогда по теореме Коши I_1=0.

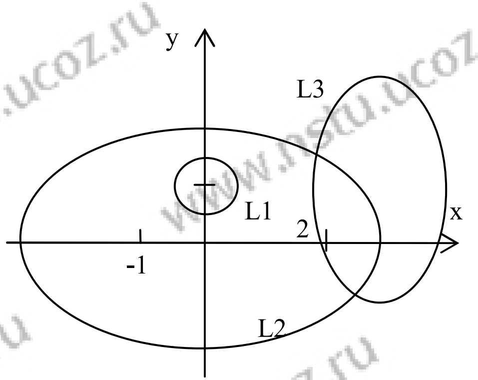
2). Внутри эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2} \le 1$ расположена одна особая точка z=0. Тогда по интегральной формуле Коши :

$$I_2 = \int\limits_L \frac{\cos z dz}{z^2(z-\pi)} = \int\limits_{L_2} \frac{\frac{\cos z}{(z-\pi)}dz}{z^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{\cos z}{(z-\pi)}\right)\right]_{z=0} = = 2\pi i \cdot \frac{-(z-\pi)\sin z - \cos z}{(z-\pi)^2} = -\frac{2i}{\pi}.$$

3) Внутри эллипса $(x-3)^2+\frac{(y-1)^2}{4} \le 1$ также находится одна особая точки: z=π. Воспользуемся снова интегральной формулой Коши:

$$I_3 = \int\limits_{L_3} \frac{\cos z dz}{z^2(z-\pi)} = \int\limits_{L_3} \frac{\frac{\cos z}{z^2}dz}{(z-\pi)} = 2\pi i \cdot \left[\left(\frac{\cos z}{z^2}\right)\right]_{z=\pi} = 2\pi i \cdot \frac{-1}{\pi^2} = -\frac{2i}{\pi}$$

.



Ответ. $I_1 = 0, \quad I_2 = -\frac{2i}{\pi}, \quad I_3 = -\frac{2i}{\pi}$.

Задача 9. *Разложить функцию в ряд Лорана в областях.*

$\frac{z-1}{z^2-3z-10}$, 1) $2<|z|<5$ 2) $|z|>5$. 3) 7<|z+2|;

Решение. Корнями уравнения z^2-3z-10=0 являются числа z_1=5 и z_2=-2. Разложим эту дробь на простые дроби: $\frac{z-1}{z^2-3z-10} = \frac{A}{z-5}+\frac{B}{z+2} = \frac{A(z+2)+B(z-5)}{(z-5)(z+2)}$.

Или $A(z+2)+B(z-5) = z-1$. При z=5 получим A=4/7. Если положить z=-2, то получим B=3/7. Следовательно, $\frac{z-1}{z^2-3z-10} = \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{z-5}+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{z+2}$. 1). В кольце $2<|z|<5$ имеем $\frac{2}{|z|}<1$ и $\frac{|z|}{5}<1$. Тогда дробь можно представить следующим образом:

$\frac{z-1}{z^2-3z-10} = -\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{5(1-\frac{z}{5})}+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{z(1+\frac{2}{z})}$. Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+...+q^n+...$, где $|q|<1$. В первой дроби q=z/5, во второй дроби q=-2/z. Следовательно,

$\frac{z-1}{z^2-3z-10}=\frac{3}{7}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n}-\frac{4}{7}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}$. 2). В кольце $|z|>5$ выполняются неравенства $\frac{2}{|z|}<1$ и $\frac{5}{|z|}<1$. Следовательно,

$$\frac{z-1}{z^2-3z-10}=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{5}{z})}+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{z(1+\frac{2}{z})}=\frac{4}{7}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{z^n}+\frac{3}{7}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n}=\frac{1}{7}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot5^{n-1}+(-1)^{n-1}3\cdot2^{n-1}}{z^n}.$$

3) 7<|z+2|;

$7<|z+2|\Rightarrow\frac{7}{|z+2|}<1;$

$$\frac{z-1}{z^2-3z-10}=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{z-5}+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{z+2}=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{(z+2)(1-\frac{7}{z+2})}+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{z+2}=\frac{4}{7}\sum_{1}^{\infty}\frac{7^n}{(z+2)^{n+1}}+\frac{3}{7}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^n}{2^{n+1}}$$

$\frac{z-1}{z^2-3z-10}=\frac{4}{7}\sum_{1}^{\infty}\frac{7^n}{(z+2)^{n+1}}+\frac{3}{7}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^n}{2^{n+1}}$ в кольце 7<|z+2|;

Ответ. 1). $\frac{z-1}{z^2-3z-10}=\frac{3}{7}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n}-\frac{4}{7}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}$. в кольце $2<|z|<5$.

2). $\frac{z-1}{z^2-3z-10}=\frac{1}{7}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot5^{n-1}+(-1)^{n-1}3\cdot2^{n-1}}{z^n}$ в кольце $|z|>5$.

3) $\frac{z-1}{z^2-3z-10}=\frac{4}{7}\sum_{1}^{\infty}\frac{7^n}{(z+2)^{n+1}}+\frac{3}{7}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^n}{2^{n+1}}$ в кольце 7<|z+2|;

Задачи 10-11. *Вычислить интегралы с помощью вычетов.*

10. $\int\limits_{|z|=4}\frac{\text{sh}(\pi z)}{z^4+8z+16}dz$ **11.** $\int\limits_{|z|=2}\frac{(z+1)}{z-1}\text{ch}\frac{2}{z-1}dz$

Решение. **10.**.Решим квадратное уравнение: $z^4+8z+16=(z^2+4)^2=0$ или $z_{1,2}=\pm2i$. Значения $z_1=2i$ и $z_2=-2i$ являются полюсами подынтегральной функции кратности 2. Тогда $\frac{\text{sh}(\pi z)}{z^4+8z+16}=\frac{\text{sh}(\pi z)}{(z+2i)^2(z-2i)^2}$. Следовательно,

$$\operatorname{Res}_{z_1}\frac{\text{sh}(\pi z)}{(z+2i)^2(z-2i)^2}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to-2i}\frac{d}{dz}[(z+2i)^2\frac{\text{sh}(\pi z)}{(z+2i)^2(z-2i)^2}]=$$

$$=\lim_{z\to-2i}\frac{\pi\text{ch}(\pi z)\cdot(z-2i)^2-\text{sh}(\pi z)\cdot2(z-2i)}{(z-2i)^4}=\frac{\pi\text{ch}(-2\pi i)\cdot(-2i-2i)^2-\text{sh}(-2\pi i)\cdot2(-2i-2i)}{(-2i-2i)^4}=-\frac{\pi}{16}.$$

$$\operatorname{Res}_{z_2}\frac{\text{sh}(\pi z)}{(z+2i)^2(z-2i)^2}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to2i}\frac{d}{dz}[(z-2i)^2\frac{\text{sh}(\pi z)}{(z+2i)^2(z-2i)^2}]=$$

$$=\lim_{z\to2i}\frac{\pi\text{ch}(\pi z)\cdot(z+2i)^2-\text{sh}(\pi z)\cdot2(z+2i)}{(z+2i)^4}=\frac{\pi\text{ch}(2\pi i)\cdot(2i+2i)^2-\text{sh}(2\pi i)\cdot2(2i+2i)}{(2i+2i)^4}=-\frac{\pi}{16}.$$

Здесь учтено, что ch(2πi)=1, а sh(2πi)=0. Получим окончательно:

$$\int\limits_{|z|=4}\frac{\text{sh}(\pi z)}{z^4+8z+16}dz=2\pi i\cdot(-\frac{\pi}{16}-\frac{\pi}{16})=-\frac{\pi^2 i}{4}$$

11. Подынтегральная функция имеет существенно особую точку z=1. Поэтому для вычисления вычета относительно этой точки следует разложить функцию в ряд Лорана. Воспользуемся разложением в ряд функций sh(w) и cos(w) по степеням w:

$\mathrm{ch}(w) = 1 + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} + \frac{w^6}{6!} + \ldots$ Полагая $w = \frac{2}{z-1}$, получим:

$$\frac{z+1}{z-1}\mathrm{ch}\frac{2}{z-1} = (1 + \frac{2}{z-1})\left(1 + \frac{2^2}{2(z-1)^2} + \frac{2^4}{4!(z-1)^3} + \frac{2^6}{5!(z-1)^6} + \ldots\right)$$

Коэффициентом при $(z\text{-}1)^{-1}$ с учётом множителя будет число 2.
Вычет данной функции равен коэффициенту при $(z\text{-}1)^{-1}$ в данном разложении, т.е. $\operatorname*{Res}_{1}\frac{z+1}{z-1}\mathrm{ch}\frac{2}{z-1} = 2$. Следовательно. $\int\limits_{|z|=2}\frac{(z+1)}{z-1}\mathrm{ch}\frac{2}{z-1}dz = 2\pi i \cdot 2 = 4\pi i$.

Ответ. 10. $\int\limits_{|z|=4}\frac{\mathrm{sh}(\pi z)}{z^4+8z+16}dz = -\frac{\pi^2 i}{4}$. 11. $\int\limits_{|z|=2}\frac{(z+1)}{z-1}\mathrm{ch}\frac{2}{z-1}dz = 4\pi i$

Задача 12. *Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4+1}{x^6+1}dx.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{z^4+1}{z^6+1}$. Найдём полюсы этой функции:

$z^6 = -1$ или $z = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{6}}$. В данном случае в верхней полуплоскости расположены три полюса из шести: $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ $(k=0)$, $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ $(k=1)$, $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ $(k=2)$.

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4+1}{x^6+1}dx = 2\pi i(\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{z^4+1}{z^6+1} + \operatorname*{Res}_{z_2}\frac{z^4+1}{z^6+1} + \operatorname*{Res}_{z_3}\frac{z^4+1}{z^6+1})$.

$$\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{z^4+1}{z^6+1} = \lim_{z\to z_1}\frac{(z-z_1)(z^4+1)}{z^6+1} = \lim_{z\to z_1}\frac{(z-z_1)(z^4+1)}{(z-z_1)(z^5+z^4z_1+z^3z_1^2+z^2z_1^3+zz_1^4+z_1^5)} =$$

$$= \frac{(z_1^4+1)}{6z_1^5} = \frac{e^{i\frac{4\pi}{6}}+1}{6e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} + 1}{6(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})} = \frac{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{6(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)} = -\frac{1+i\sqrt{3}}{6(\sqrt{3}-i)} = -\frac{i}{6}.$$

При разложении z^6+1 на множители было учтено, что $z_1^6 = -1$. Аналогично,

$$\operatorname*{Res}_{z_2}\frac{z^4+1}{z^6+1} = \frac{z_2^4+1}{6z_2^5} = \frac{e^{i\frac{4\pi}{2}}+1}{6e^{i\frac{5\pi}{2}}} = \frac{\cos 2\pi + i\sin 2\pi + 1}{6(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2})} = \frac{2}{6i} = -\frac{i}{3}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z_3}\frac{z^4+1}{z^6+1} = \frac{z_3^4+1}{6z_3^6} = \frac{e^{i\frac{20\pi}{6}}+1}{6e^{i\frac{25\pi}{6}}} = \frac{\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} + 1}{6(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})} = \frac{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{6(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})} = \frac{1-i\sqrt{3}}{6(\sqrt{3}+i)} = -\frac{i}{6}$$

Следовательно. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4+1}{x^6+1}dx = 2\pi i(-\frac{i}{6} - \frac{i}{3} - \frac{i}{6}) = \frac{4\pi}{3}$.

Ответ. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4+1}{x^6+1}dx = \frac{4\pi}{3}$.

Задача 13. *Вычислить интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой C от точки z_1 до точки z_2.*

$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z-i\sqrt{3}}}$, где C прямая, $z_1=1$, $z_2=-1$, $\sqrt{1-i\sqrt{3}}=-\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}$.

<u>Решение</u>. Рассмотрим функцию $\sqrt{z-i\sqrt{3}}=\sqrt{\left|z-i\sqrt{3}\right|}\cdot[\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2}]$.

Рассматривается та ветвь функции, для которой в точке z=1 величина $\sqrt{z-i\sqrt{3}}$ будет принимать заданное значение. С одной стороны

$\sqrt{1-i\sqrt{3}}=\sqrt{2}\cdot[\cos\frac{-\pi/3+2k\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi/3+2k\pi}{2}]$. С другой стороны

$\sqrt{1-i\sqrt{3}}=-\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})=\sqrt{2}\cdot[\cos(\frac{5\pi}{6})+i\sin(\frac{5\pi}{6})]$.. Сравнивая эти выражения, приходим к выводу, что указанной ветви функции соответствует значение k=1. Следовательно, данная ветвь функции имеет уравнение

$\sqrt{z-i\sqrt{3}}=\sqrt{\left|z-i\sqrt{3}\right|}\cdot[\cos(\frac{\varphi}{2}+\pi)+i\sin(\frac{\varphi}{2}+\pi)]$.

Таким образом, $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z-i\sqrt{3}}}=2\sqrt{z-i\sqrt{3}}\Big|_1^{-1}=2(\sqrt{-1-i\sqrt{3}}-\sqrt{1-i\sqrt{3}})=$

$=2\sqrt{2}\cdot\{[\cos(\frac{4\pi}{3\cdot 2}+\pi)+i\sin(\frac{4\pi}{3\cdot 2}+\pi)]-[\cos(-\frac{\pi}{3\cdot 2}+\pi)+i\sin(-\frac{\pi}{3\cdot 2}+\pi)]\}=$

$=2\sqrt{2}[\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}]=\sqrt{2}[(1+\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})i]=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})(1-i)$

<u>Ответ</u>. $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z-i\sqrt{3}}}=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})(1-i)$.