Вариант 6

Задача 1. *Вычислить значение функции (ответ дать в алгебраической форме):*

а) $\operatorname{sh}(2-i)$; б) $\ln(3-2i)$

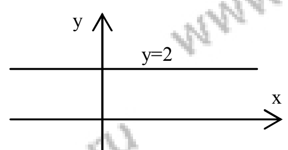
Решение. а). Воспользуемся формулой связи между тригонометрическим синусом и гиперболическим синусом: ; sh(z)= -isin(iz). Получим sh(2-i)=-i·sin(2i-i^2)= -i·sin(1+2i). По формуле тригонометрии sin(1+2i)=sin1·cos(2i)+cos1·sin(2i). Воспользуемся формулами связи между тригонометрическими и гиперболическими функциями:
cos(2i)=ch2; sin(2i)= ish2. Получим sh(2-i)=-i(sin1·ch2+ i·cos1·sh2)= cos1·sh2-i·sin1·ch2.

б). Воспользуемся формулой $\operatorname{Ln}(z) = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)$. В данном случае $z = 3-2i$. Найдём модуль и аргумент этого числа: $|z| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$ $\varphi = \arg z = -\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}$ (четвёртая четверть). Таким образом $\operatorname{Ln}(3-2i) = \ln\sqrt{13} + i(2k\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3})$.

Ответ. а) sh(2-i)= cos1·sh2-i·sin1·ch2; б) $\operatorname{Ln}(3-2i) = \ln\sqrt{13} + i(2k\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3})$.

Задача 2. *Выяснить геометрический смысл соотношения. Сделать чертёж.*

$$|z-i| = |z-3i|.$$



Решение. Так как z=x+iy, то данное соотношение имеет вид: $|x + i(y-1)| = |x + i(y-3)|$.

Или $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$. Возведём обе части в квадрат. Получим: $x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + y^2 - 6y + 9$. Или $4y = 8$. Уравнение можно поделить на 2, получим: y=2.

Ответ. Данное соотношение представляет уравнение прямой $y = 2$.

Задача 3. *Решить уравнение*: $2\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = i$.

Решение. Перейдём к показательной функции:

$(e^z + e^{-z}) - \dfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = i$. Умножим уравнение на 2e^z. Тогда уравнение примет вид:

$2(e^{2z}+1) - (e^{2z}-1) = 2ie^z$ или $e^{2z} - 2ie^z + 3 = 0$. Введём обозначение V=e^z. Найдём корни квадратного уравнения V^2-2iV+3=0:

$V = i \pm \sqrt{i^2 - 3} = i \pm 2i = i(1 \pm 2)$.

Таким образом, имеем два корня: $V_1 = 3i$, $V_2 = -i$.

Найдём модули и аргументы этих чисел:

$$|V_1| = 3, \quad \arg V_1 = \frac{\pi}{2}, \quad |V_2| = 1, \quad \arg V_2 = -\frac{\pi}{2}.$$

Так как V=e^z, то z=LnV. Далее воспользуемся формулой $\operatorname{Ln}V = \ln|V| + i(\varphi + 2k\pi)$. Получим:

$$z_1 = \operatorname{Ln}V_1 = \ln 3 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)] = \ln 3 + \pi i(2k + \frac{1}{2}), \quad z_2 = \operatorname{Ln}V_2 = \ln 1 + i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)] = \pi i(2k - \frac{1}{2}) \quad .$$

Ответ. $z_1 = \ln 3 + \pi i(2k + \dfrac{1}{2})$, $z_2 = \pi i(2k - \dfrac{1}{2})$.

Задача 4. *Доказать тождество.*

$\operatorname{ch}(z_1 - z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 - \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$

Решение. Рассмотрим правую часть равенства:

$$\operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 - \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2 = \frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2} \cdot \frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2} - \frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2} \cdot \frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2} = \frac{1}{4}(e^{z_1}e^{z_2} + e^{z_1}e^{-z_2} +$$

$$+ e^{-z_1}e^{z_2} + e^{-z_1}e^{-z_2} - e^{z_1}e^{z_2} + e^{z_1}e^{-z_2} + e^{-z_1}e^{z_2} - e^{-z_1}e^{-z_2}) = \frac{1}{4} \cdot 2(e^{z_1}e^{-z_2} + e^{-z_1}e^{z_2}) =$$

$=\frac{1}{2}(e^{(z_1-z_2)}+e^{-(z_1-z_2)})=\mathrm{ch}(z_1-z_2)$, что и требовалось доказать.

Задача 5. *Восстановить аналитическую функцию по заданной мнимой части её:*

$$\operatorname{Im} f(z)=v=e^x\cdot(y\cos y+(x-1)\sin y)\text{, } \textit{если } f(0)=1.$$

Решение. Чтобы функция v(x,y) бала действительной частью аналитической функции нужно, чтобы она была гармонической, т.е. её лапласиан Δv был бы равен нулю: $\Delta v=0$, $\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Проверим выполнение этого условия, для чего найдём производные второго порядка от v по *x* и по *y*:

$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x(y\cos y+(x-1)\sin y)+e^x\sin y=e^x(y\cos y+x\sin y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^x[y\cos y+x\sin y+\sin y]$,

$\frac{\partial v}{\partial y}=e^x(\cos y-y\sin y+(x-1)\cos y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^x[-x\sin y-y\cos y-\sin y]$.

Таким образом, лапласиан Δv равен нулю. Восстановим действительную часть u(x,y) функции f(z)=u(x,y)+iv(x,y), пользуясь условиями Даламбера-Эйлера: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

Из первого условия получаем: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=e^x(x\cos y-y\sin y)$. Тогда $u(x,y)=\int\frac{\partial u}{\partial x}dx+\varphi(x)$, или $u(x,y)=\int e^x(x\cos y-y\sin y)dx+\varphi(x)=e^x[(x-1)\cos y-y\sin y]+\varphi(y)$. Производная по y от этого выражения равна $\frac{\partial u}{\partial y}=e^x(-(x-1)\sin y-\sin y-y\cos y)+\varphi'(y)=e^x(-x\sin y-y\cos y)$. С другой стороны по второму условию Даламбера-Эйлера $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-e^x(y\cos y+x\sin y)=$.

Приравнивая эти выражения, получим: $\varphi'(x)=0$. Отсюда $\varphi(x)=C$. Таким образом, $u(x,y)=e^x((x-1)\cos y-y\sin y)+C$. Тогда

$f(z)=e^x\cdot((x-1)\cos y-y\sin y)+i\cdot e^x(y\cos y+(x-1)\sin y)+C$. Перейдём к переменной z:

$f(z)=e^x\cdot[(x-1)(\cos y+i\sin y)+y(i^2\sin y+i\cos y)]+C=e^x\cdot[(x-1)e^{iy}+iye^{iy}]+C=$

$=e^x\cdot e^{iy}(x+iy-1]+C=e^{x+iy}(z-1)+C=(z-1)\cdot e^z+C$. Воспользуемся дополнительным условием f(0)=i. В данном случае f(0)=-1+C=1. Т.е. C=2.

Ответ. $f(z)=e^x\cdot[(x-1)\cos y-y\sin y]+2+i\cdot e^x[(x-1)\sin y+y\cos y]=(z-1)\cdot e^z+2$.

Задача 6. *Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2.*

$$\int_C z\operatorname{Re}\bar{z}\,dz;\qquad C:\quad x=y^2,\quad z_1=0,\ z_2=1+i.$$

Решение. Вычислим интеграл, сводя его к криволинейным интегралам второго рода по формуле $\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C udy+vdx$. В данном случае f(z)=(x+iy)x или $f(z)=x^2+i\cdot xy$. Значит $\int_C f(z)dz=\int_C x^2dx-xydy+i\int_C x^2dy+xydx$. Примем y за параметр. Тогда $x=y^2$, $dx=2ydy$. Начальной точке $z_1=0$ соответствует значение y=0, конечной $z_2=1+i$ – значение y=1.

Следовательно, $\int_C z\operatorname{Re}\bar{z}\,dz=\int_0^1[2y^5-y^3]dy+i\int_0^1[y^4+2y^4]dy=[\frac{y^6}{3}-\frac{y^4}{4}]\Big|_0^1+i\frac{3y^5}{5}\Big|_0^1=\frac{1}{12}+\frac{3}{5}i$.

Ответ. $\int_C z\operatorname{Re}\bar{z}\,dz=\frac{1}{12}+\frac{3}{5}i$.

Задача 7. *Вычислить интеграл от аналитической функции* $\int\limits_1^i z\cdot \operatorname{sh} z\,dz$.

Решение. Применим формулу формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_1^i z\cdot \operatorname{sh} z\,dz = \begin{vmatrix} u=z & du=dz \\ dv=\operatorname{sh} z\,dz & v=\operatorname{ch} z \end{vmatrix} = z\cdot \operatorname{ch} z\Big|_1^i - \int\limits_1^i \operatorname{ch} z\,dz = i\cdot \operatorname{ch} i - \operatorname{ch}1 - \operatorname{sh} z\Big|_1^i = i\cdot \operatorname{ch} i - \operatorname{ch}1 - \operatorname{sh} i + \operatorname{sh}1.$$

Перейдём к тригонометрическим функциям: $\operatorname{sh} i = i\sin 1,\quad \operatorname{ch} i = \cos 1$. Получим:

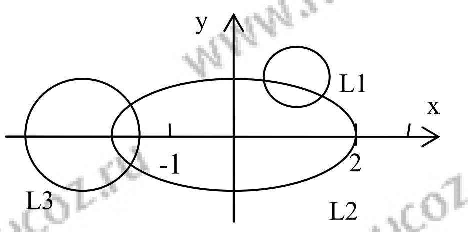
$$\int\limits_1^i z\cdot \operatorname{sh} z\,dz = \operatorname{sh}1 - \operatorname{ch}1 + i\cdot(\cos 1 - \sin 1).$$

Ответ. $\int\limits_1^i z\cdot \operatorname{sh} z\,dz = \operatorname{sh}1 - \operatorname{ch}1 + i\cdot(\cos 1 - \sin 1)$.

Задача 8. *Найти интеграл, используя интегральную формулу Коши, по контурам L_1, L_2, L_3.* $\int\limits_L \frac{e^{iz}dz}{(z^2-1)(z+3)^2}$, 1) $L_1: |z-1-i| = \frac{1}{2}$, 2) $L_2: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 3) $L_3: \left|z+\frac{5}{2}\right| = 1$.

Решение. 1). Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек z=-1, z=1 и z=-3. В круге $|z-1-i| \le \frac{1}{2}$ подынтегральная функция аналитична. Следовательно,

$$I_1 = \int\limits_{L_1} \frac{e^{iz}dz}{(z^2-1)(z+3)^2} = 0.$$



2). В эллипсе $\frac{x^2}{4} + y^2 \le 1$ есть две особые точки: z=-1 и z=1. Поэтому применим теорему Коши для многосвязной области:

$$I_2 = \int\limits_{L2} \frac{e^{iz}dz}{(z^2-1)(z+3)^2} = \int\limits_{l_1} \frac{e^{iz}dz}{(z^2-1)(z+3)^2} + \int\limits_{l_2} \frac{e^{iz}dz}{(z^2-1)(z+3)^2},$$

где l_1 - окружность достаточно малого радиуса с центром в точке z=-1, а l_2 - окружность малого радиуса с центром в точке z=1. Вычислим оба интеграла по интегральной формуле Коши:

$$\int\limits_{l_1} \frac{e^{iz}dz}{(z^2-1)(z+3)^2} = \int\limits_{l_1} \frac{\frac{e^{iz}}{(z-1)(z+3)^2}dz}{(z+1)} = 2\pi i\cdot\left[\frac{e^{iz}}{(z-1)(z+3)^2}\right]_{z=-1} = 2\pi i\cdot\frac{e^{-i}}{-8} = -\frac{\pi i}{4}e^{-i};$$

$$\int\limits_{l_2} \frac{e^{iz}dz}{(z^2-1)(z+3)^2} = \int\limits_{l_2} \frac{\frac{e^{iz}}{(z+1)(z+3)^2}dz}{(z-1)} = 2\pi i\cdot\left[\frac{e^{iz}}{(z+1)(z+3)^2}\right]_{z=1} = 2\pi i\cdot\frac{e^{i}}{32} = \frac{\pi i}{16}e^{i}.$$

Следовательно, $I_2 = \int\limits_{L2} \frac{e^{iz}dz}{(z^2-1)(z+3)^2} = \frac{\pi i}{16}(e^{i} - 4e^{-i})$.

3). Внутри области $\left|z+\frac{5}{2}\right| \le 1$ расположена одна особая точка z=-3. Тогда по интегральной формуле Коши

$$\int\limits_{L_3} \frac{e^{iz}dz}{(z^2-1)(z+3)^2} = \int\limits_{l_1} \frac{\frac{e^{iz}}{(z^2-1)}dz}{(z+3)^2} = 2\pi i\cdot\frac{1}{1!}\cdot\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{iz}}{(z^2-1)}\right]_{z=-3} =$$

$$= 2\pi i\cdot\left[\frac{ie^{iz}(z^2-1) - e^{iz}\cdot 2z}{(z^2-1)^2}\right]_{z=-3} = \frac{\pi i}{16}(4i+3)e^{-3i}.$$

Ответ. $I_1=0,\quad I_2=\frac{\pi i}{16}(e^{i}-4e^{-i}),\quad I_3=\frac{\pi i}{16}(4i+3)e^{-i}.$

Задача 9. *Разложить функцию в ряд Лорана в областях.*

$\frac{z-6}{z^2-7z+10}$, 1) $2<|z|<5$ 2) $|z|>5$. 3) 2<|z-5|.

Решение. Корнями уравнения z^2-7z+10=0 являются числа z_1=5 и z_2=2. Разложим эту дробь на простые дроби: $\frac{z-6}{z^2-7z+10}=\frac{A}{z-5}+\frac{B}{z-2}=\frac{A(z-2)+B(z-5)}{(z-5)(z-2)}$. Или

$A(z-2)+B(z-5)=z-6$. При z=5 получим A=-1/3. Если положить z=2, то получим B=4/3.

Следовательно, $\frac{z-6}{z^2-7z+10}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-5}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{z-2}$. 1). В кольце $2<|z|<5$ имеем

$\frac{2}{|z|}<1$ и $\frac{|z|}{5}<1$. Тогда дробь можно представить следующим образом:

$\frac{z-6}{z^2-7z+10}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5(1-\frac{z}{5})}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{2}{z})}$. Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей

геометрической прогрессии: $\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+...+q^n+...$, где $|q|<1$. В первой дроби q=z/5, во второй дроби q=2/z. Следовательно,

$\frac{z-6}{z^2-7z+10}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{z^n}+\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}$. 2). В кольце $|z|>5$ выполняются неравенства

$\frac{2}{|z|}<1$ и $\frac{5}{|z|}<1$. Следовательно,

$$\frac{z-6}{z^2-7z+10}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{5}{z})}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{2}{z})}=-\frac{1}{3}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{z^n}+\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{z^n}=\frac{1}{3}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}-5^{n-1}}{z^n}.$$

3) 2<|z-5|;

$2<|z-5|\Rightarrow\frac{3}{|z-5|}<1;$

$$\frac{z-6}{z^2-7z+10}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-5}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-5}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(z-5)(1-\frac{-3}{z-5})}=$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}+\frac{4}{3}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{(z-5)^{n+1}};$$

$$\frac{z-6}{z^2-7z+10}=-\frac{1}{3}\sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}+\frac{4}{3}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{(z-5)^{n+1}};$$

Ответ. 1). $\frac{z-6}{z^2-7z+10}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{z^n}+\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}$ в кольце $2<|z|<5$.

2). $\frac{z-6}{z^2-7z+10}=\frac{1}{3}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}-5^{n-1}}{z^n}$ в кольце $|z|>5$.

3) $\frac{z-6}{z^2-7z+10}=-\frac{1}{3}\sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}+\frac{4}{3}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{(z-5)^{n+1}}$; в кольце 2<|z-5|.

Задачи 10-11. *Вычислить интегралы с помощью вычетов.*

10. $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{\sin(z^2-4)}{z^4-8z^2+16}dz$ **11.** $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{z+1}{z}e^z dz$

Решение. **10.**. ..Решим квадратное уравнение: z^4-8z+16=$(z^2-4)^2$=0 или $z_{1,2}=\pm 2$. Значения z_1=2 и z_2=-2 являются полюсами подынтегральной функции кратности 2. Тогда

$\dfrac{\sin(z^2-4)}{z^4-8z+16}=\dfrac{sh(z^2-4)}{(z+2)^2(z-2)^2}$. Следовательно,

$$\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{\sin(z^2-4)}{(z+2)^2(z-2)^2}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to -2}\frac{d}{dz}[(z+2)^2\frac{\sin(z^2-4)}{(z+2)^2(z-2)^2}]=$$

$$=\lim_{z\to -2}\frac{2z\cos(z^2-4)\cdot(z-2)^2-\sin(z^2-4)\cdot 2(z-2)}{(z-2)^4}=\frac{-4ch(0)\cdot(-2-2)^2-sh(0)\cdot 2(-2-2)}{(-2-2)^4}=-\frac{1}{4}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z_2}\frac{\sin(z^2-4)}{(z+2)^2(z-2)^2}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}[(z-2)^2\frac{\sin(z^2-4)}{(z+2)^2(z-2)^2}]=$$

$$=\lim_{z\to 2}\frac{2z\cos(z^2-4)\cdot(z+2)^2-\sin(z^2-4)\cdot 2(z+2)}{(z+2)^4}=\frac{4ch(0)\cdot(2+2)^2-sh(0)\cdot 2(2+2)}{(2+2)^4}=\frac{1}{4}.$$

Здесь учтено, что ch(0)=1, а sh(0)=0. Получим окончательно:

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{\sin(z^2-4)}{z^4-8z^2+16}dz=2\pi i\cdot(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4})=0.$$

11. Подынтегральная функция имеет существенно особую точку z=0. Поэтому для вычисления вычета относительно этой точки следует разложить функцию в ряд Лорана. Воспользуемся разложением в ряд функции e^w по степеням w:

$e^z=1+w+\dfrac{w^2}{2!}+\dfrac{w^3}{3!}+\dfrac{w^4}{4!}+...$ Полагая $w=\dfrac{1}{z}$, получим:

$$\frac{z+1}{z}e^{\frac{1}{z}}=(1+\frac{1}{z})\left[1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{2!z^2}+\frac{2^3}{3!z^3}+\frac{2^4}{4!z^4}+...\right]=1+\frac{3}{z}+\frac{4}{z^2}+...$$

Коэффициентом при z^{-1} в разложении функции будет число 3.Вычет данной функции равен коэффициенту при z^{-1} в данном разложении, т.е. $\operatorname*{Res}_{0}[\dfrac{z+1}{z}e^{\frac{1}{z}}]=3$. Следовательно.

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{z+1}{z}e^z dz=2\pi i\cdot 3=6\pi i.$$

Ответ. 10. $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{\sin(z^2-4)}{z^4-8z^2+16}dz=0$. 11. $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{z+1}{z}e^z dz=6\pi i$

Задача 12. *Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^4+6x^2+25)}dx.$$

Решение. Найдём корни знаменателя функции $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^4+6z^2+25)}$, решая биквадратное уравнение: $(z^2)^2$+6(z^2)+25=0, $z^2=-3\pm\sqrt{9-25}=-3\pm 4i=5(-\frac{3}{5}\pm\frac{4i}{5})$. Число $z^2=5(-\frac{3}{5}+\frac{4i}{5})$ геометрически расположено во второй четверти комплексной плоскости. Следовательно, один из корней $\sqrt{z^2}$ обязательно будет расположен в первой четверти. Найдём этот корень. Если

$\cos\varphi = -\frac{3}{5}$, то $\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{5})} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, тогда $\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Итак, $z_1 = \sqrt{5}(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2i}{\sqrt{5}}) = 1+2i$. Тогда $z_2 = \sqrt{5}(-\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{i}{\sqrt{5}}) = 1-2i$.Аналогично, число $z^2 = 5(-\frac{3}{5} - \frac{4i}{5})$ геометрически расположено в третьей четверти комплексной плоскости. Следовательно, один из корней $\sqrt{z^2}$ обязательно будет расположен во второй четверти. Это значит, что $z_3 = \sqrt{5}(-\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2i}{\sqrt{5}}) = -1+2i$. Тогда $z_4 = \sqrt{5}(-\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{i}{\sqrt{5}}) = -1-2i$.В данном случае в верхней полуплоскости расположены два простых полюса z_1 и z_3 функции

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^4+6z^2+25)}.$$

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+25)}dx = 2\pi i(\operatorname*{Res}_{1+2i}\frac{x^2}{x^4+6x^2+25)} + \operatorname*{Res}_{-1+2i}\frac{x^2}{x^4+6x^2+25)})$.

$$\operatorname*{Res}_{1+2i}\frac{z^2}{z^4+6z^2+25} = \lim_{z\to 1+2i}\frac{(z-1-2i)z^2}{(z-1-2i)(z-1+2i)(z+1-2i)(z+1+2i)} = \frac{-3+4i}{4i\cdot 4(1+2i)} = \frac{1+2i}{16i\cdot}.$$

$$\operatorname*{Res}_{-1+2i}\frac{z^2}{z^4+6z^2+25} = \lim_{z\to -1+2i}\frac{(z+1-2i)z^2}{(z-1-2i)(z-1+2i)(z+1-2i)(z+1+2i)} = \frac{-3-4i}{4i\cdot 4(1-2i)} = \frac{1-2i}{24i\cdot}.$$

Следовательно. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+25)}dx = 2\pi i(\frac{1+2i}{16i} + \frac{1-2i}{16i}) = \frac{\pi}{4}$.

Ответ. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+25)}dx = \frac{\pi}{4}$.

Задача 13. *Вычислить интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой C от точки z_1 до точки z_2.*

$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{3-z}}$, где C прямая, z_1=-4i, z_2=4i, $\sqrt{3+4i} = 2+i$.

Решение. По формуле Ньютона –Лейбница $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{3-z}} = -2\sqrt{3-z}\Big|_{-4i}^{4i}$.

Рассмотрим функцию $\sqrt{3-z} = \sqrt{|3-z|}\cdot[\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2}]$. Рассматривается та ветвь функции, для которой в точке z=-4i величина $\sqrt{3-z}$ будет принимать заданное значение $\sqrt{3+4i} = 2+i$. Так как числа 3+4i и 2+i оба геометрически находятся в первой четверти комплексной плоскости, то это соответствует первой ветви функции $\sqrt{3-z}$ (k=0).

Следовательно, данная ветвь функции имеет уравнение $\sqrt{3-z} = \sqrt{|3-z|}\cdot[\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}]$.

Вычислим $\sqrt{3-4i}$ на этой ветви. Так как число 3-4i находится в четвёртой четверти комплексной плоскости, то число $\sqrt{3-4i}$ на этой ветви будет расположен также в четвёртой четверти (при делении отрицательного угла на 2 получается также отрицательный угол). Следовательно, $\sqrt{3-4i} = 2-i$.

Таким образом, $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{3-z}} = 2\sqrt{3-z}\Big|_{-4i}^{4i} = 2(2-i-2-i) = -4i$.

Ответ. $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{3-z}} = 2\sqrt{3-z}\Big|_{-4i}^{4i} = 2(2-i-2-i) = -4i$.