Вариант 8

Задача 1. *Вычислить значение функции (ответ дать в алгебраической форме):*

$$\text{а)}\quad \mathrm{sh}(2+i); \qquad \text{б)}\quad \mathrm{Ln}(i^i)$$

<u>Решение</u>. а). Воспользуемся формулой связи между тригонометрическим синусом и гиперболическим синусом: ; sh(z)= -isin(iz). Получим sh(2+i)=-i·sin(2i+i^2)= -i·sin(-1+2i). По формуле тригонометрии sin(-1+2i)=sin(-1)·cos(2i)+cos(-1)·sin(2i). Учитывая чётность косинуса и нечётность синуса, получим: sin(-1+2i)=-sin1·cos(2i)+cos1·sin(2i). Воспользуемся формулами связи между тригонометрическими и гиперболическими функциями: cos(2i)=ch2; sin(2i)= ish2. Получим sh(2+i)=-i(-sin1·ch2+ i·cos1·sh2)= = cos1·sh2+i·sin1·ch2.

б). Воспользуемся формулой $i^i = e^{iLni}$. Получим: $iLni = i\cdot[\ln|i| + i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)] = -(\frac{\pi}{2}+2k\pi)$.

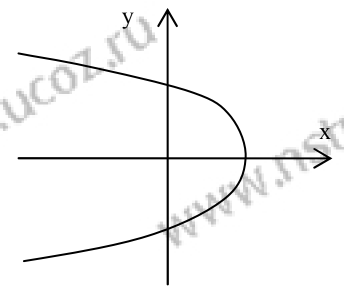
Тогда $\mathrm{Ln}(i^i) = \mathrm{Ln}\left(e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}\right) = \ln\left|e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}\right| + 2\pi ni = -\pi(\frac{1}{2}+2k) + 2\pi ni$.

<u>Ответ</u>. а) sh(2+i)=cos1·sh2+ i·sin1·ch2; б) $\mathrm{Ln}(i^i) = -\pi(2k+\frac{1}{2}) + 2\pi ni$.

Задача 2. *Выяснить геометрический смысл соотношения. Сделать чертёж.*

$$\mathrm{Re}\, z + |z| < 1.$$

<u>Решение</u>. Так как z=x+iy, то данное соотношение имеет вид: $x + |x+iy)| < 1$.



Или $\sqrt{x^2+y^2} < 1-x$. Возведём обе части в квадрат.

Получим: $x^2+y^2 < x^2-2x+1$. Или $y^2 < 1-2x$.

<u>Ответ</u>. Данное соотношение представляет область, расположенную внутри параболы $y^2 = 1-2x$ с вершиной в точке (1/2; 0)

Задача 3. *Решить уравнение*: $e^{2z} - 2e^z + 2 = 0$.

<u>Решение</u>. Обозначим V=e^z и решим квадратное уравнение V^2-2V+2=0:

$V_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$. Таким образом, имеем два корня: $V_1 = 1+i, \quad V_2 = 1-i$.

Найдём модули и аргументы этих чисел: $|V_1| = \sqrt{2}, \quad \arg V_1 = \frac{\pi}{4}, \quad |V_2| = \sqrt{2}, \quad \arg V_2 = -\frac{\pi}{4}$.

Так как V=e^z, то z=LnV. Далее воспользуемся формулой $\mathrm{Ln}V = \ln|V| + i(\varphi + 2k\pi)$. Получим:

$$z_1 = \mathrm{Ln}V_1 = \ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4}+2k\pi), \quad z_2 = \mathrm{Ln}V_2 = \ln\sqrt{2} + i(-\frac{\pi}{4}+2k\pi) \quad .$$

<u>Ответ</u>. $z_{1,2} = \ln\sqrt{2} \pm i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i$.

Задача 4. *Доказать тождество.*

$\mathrm{sh}(2z) = 2\,\mathrm{sh}\,z \cdot \mathrm{ch}\,z$

<u>Решение</u>. Рассмотрим правую часть равенства:

$2\,\mathrm{sh}\,z\cdot\mathrm{ch}\,z = 2\frac{e^z - e^{-z}}{2}\cdot\frac{e^z+e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}(e^z e^z + e^z e^{-z} - e^{-z}e^z - e^{-z}e^{-z}) = \frac{e^{2z}-e^{-2z}}{2} = \mathrm{sh}(2z)$, что и требовалось доказать.

Задача 5. *Восстановить аналитическую функцию по заданной мнимой части её:*

$\mathrm{Im}\, f(z) = v = 3x^2y - 3x^2 + 1 + 3y^2 - 3y + Ay^3$, *если* f(0)=i.

Решение. Чтобы функция v(x,y) бала мнимой частью аналитической функции нужно, чтобы она была гармонической, т.е. её лапласиан Δv был бы равен нулю: $\Delta v=0$, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Проверим выполнение этого условия. Найдём производные второго порядка от v по *x* и по *y*:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=6xy-6x,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=6(y-1),\quad \frac{\partial v}{\partial y}=3x^2+6y-3+3Ay^2,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6(1+Ay).$$

Чтобы лапласиан Δv был равен нулю, нужно положить A=-1. Таким образом, функция $v(x,y)=3x^2y-3x^2+1+3y^2-3y-y^3$ является гармонической. Восстановим действительную часть u(x,y) функции f(z)=u(x,y)+iv(x,y), пользуясь условиями Даламбера-Эйлера: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Из первого условия получаем: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=3(x^2+2y-1-2y^2)$. Тогда

$u(x,y)=\int\frac{\partial u}{\partial x}dx+\varphi(y)$, или $u(x,y)=\int 3(x^2+2y-1-y^2)dx+\varphi(y)=x^3-3(y-1)^2x+\varphi(y).$

Производная по y от этого выражения равна $\frac{\partial u}{\partial y}=-6x(y-1)+\varphi'(y).$ С другой стороны по второму условию Даламбера-Эйлера $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-6xy+6x.$ Приравнивая эти выражения, получим: $\varphi'(y)=0.$ Или $\varphi(y)=C.$ Таким образом, $u(x,y)=-3x(y-1)+C.$ Тогда

$f(z)=x^3-3x(y-1)^2+C+i(3^2xy-3x^2+1+3y^2-3y-y^3)$. Перейдём к переменной z:

$f(z)=x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3-3i(x^2+2ixy-y^2)-3(x+iy)+C+i=(x+iy)^3-3i(x+iy)^2-3z+i+C$.

Или $f(z)=z^3-3iz^2-3z+i+C$.Воспользуемся дополнительным условием f(0)=i. В данном случае f(0)=i+C. Т.е. C=0.

Ответ. $f(z)=x^3-3xy^2+6xy-3x+i(3x^2y-3x^2+1+3y^2-3y-y^3)=z^3-3iz^2-3z+i=(z-i)^3$

Задача 6. *Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2.*

$$\int_C(1-i-\bar z)\,dz;\qquad C: x=y^2,\quad z_1=0,\ z_2=1+i.$$

Решение. Вычислим интеграл, сводя его к криволинейным интегралам второго рода по формуле $\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C udy+vdx$. В данном случае f(z)=[1-i-(x-iy)] или

$f(z)=1-x+(y-1)i.$ Значит $\int_C f(z)dz=\int_C(1-x)dx-(y-1)dy+i\int_C(1-x)dy+(y-1)dx$. Примем y за параметр. Тогда x=y^2, dx=2ydy. Начальной точке z_1=0 соответствует значение y=0, конечной z_2=1+i – значение y=1.

Следовательно,

$$\int_C(1-i-\bar z)\,dz=\int_0^1[2y(1-y^2)-(y-1)]dy+i\int_0^1[(1-y^2)+2(y-1)y)]dy=[y^2-\frac{y^4}{2}-\frac{y^2}{2}+y]\Big|_0^1+$$

$$+i[y-\frac{y^3}{3}+-\frac{2y^3}{3}-y^2]_0^1=1+\frac{i}{3}$$

Ответ. $\int_C(1-i-\bar z)\,dz=1+\frac{i}{3}$.

Задача 7. *Вычислить интеграл от аналитической функции* $\int_1^i(z-1)\cdot\sin z\,dz$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_1^i (z-1)\cdot \sin z\,dz = \begin{vmatrix} u = z-1 & du = dz \\ dv = \sin z\,dz & v = -\cos z \end{vmatrix} = -(z-1)\cdot\cos z\Big|_1^i + \int_1^i \cos z\,dz =$$

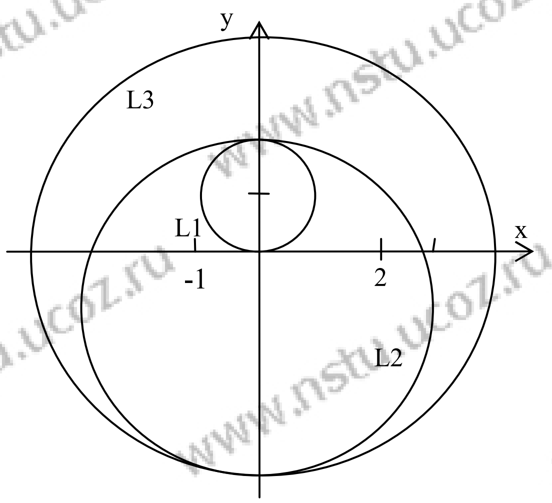
$$= -(i-1)\cdot\cos i + \sin z\Big|_1^i = (i-1)\cdot\cos i + \sin i - \sin 1 .$$

Перейдём к гиперболическим функциям: $\cos i = \mathrm{ch}1,\ \sin i = i\cdot\mathrm{sh}1$. Получим:

$$\int_1^i (z-1)\cdot e^i\,dz = -(i-1)\mathrm{ch}1 + i\,\mathrm{sh}\,1 + \sin 1 = \mathrm{ch}1 - \sin 1 + i(\mathrm{sh}\,1 - \mathrm{ch}\,1) .$$

Ответ. $\int_1^i (z-1)\cdot e^i\,dz = \mathrm{ch}1 - \sin 1 + i(\mathrm{sh}\,1 - \mathrm{ch}\,1)$.

Задача 8. *Найти интеграл, используя интегральную формулу Коши, по контурам L_1, L_2, L_3.* $\int\limits_L \frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)(z-\frac{\pi}{2})^2}$, 1) $L_1 : |z-i| = 1$, 2) $L_2 : |z+i| = 3$, 3) $L_3 : |z| = 4$.



Решение. 1). Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек $z=\pi$, и $z=\pi/2$. Внутри области $|z+3|\le 1$ подынтегральная функция аналитична. Следовательно,

$I_1 = \int\limits_{L_1} \frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)(z-\frac{\pi}{2})^2} = 0$. 2). В круге $|z+i|\le 3$ есть одна особая точка: $z=\pi/2$. Тогда по интегральной формуле Коши

$$\int\limits_{L_2} \frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)(z-\frac{\pi}{2})^2} = \int\limits_{L_2} \frac{\frac{e^{iz}}{(z-\pi)}dz}{(z-\pi/2)^2} =$$

$$= 2\pi i\cdot\frac{1}{1!}\cdot\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{iz}}{(z-\pi)}\right]_{z=\pi/2} = 2\pi i\cdot\left[\frac{ie^{iz}(z-\pi)-e^{iz}}{(z-\pi)^2}\right] =$$

$$= \frac{8ie^{i\pi/2}}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi i}{2}-1\right) = \frac{8i}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi i}{2}-1\right)\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4i + \frac{8}{\pi}.$$

3). Внутри области $|z|\le 4$ есть две особые точки: $z=\pi$ и $z=\pi/2$. Поэтому применим теорему Коши для многосвязной области: $I_3 = \int\limits_{L3} \frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)(z-\frac{\pi}{2})^2} = \int\limits_{l_1} \frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)(z-\frac{\pi}{2})^2} + \int\limits_{l_2} \frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)(z-\frac{\pi}{2})^2}$, где l_1 - окружность достаточно малого радиуса с центром в точке $z=\pi/2$, а l_2 - окружность малого радиуса с центром в точке $z=\pi$. Первый интеграл уже вычислен. Вычислим второй интеграл по интегральной формуле Коши:

$$\int\limits_{l_2} \frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)(z-\pi/2)^2} = \int\limits_{L_3} \frac{\frac{e^{iz}}{(z-\pi/2)^2}dz}{(z-\pi)} = 2\pi i\cdot\left[\frac{e^{iz}}{(z-\pi/2)^2}\right]_{z=\pi} = \frac{8i}{\pi}\cdot e^{i\pi} = \frac{8i}{\pi}\cdot(\cos\pi + i\sin\pi) = -\frac{8i}{\pi} .$$

Тогда $I_3 = \int\limits_{L3} \frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)(z-\frac{\pi}{2})^2} = 4i + \frac{8}{\pi} - \frac{8i}{\pi} = \frac{8}{\pi} + 4i\left(1-\frac{2}{\pi}\right)$

Ответ. $I_1 = 0,\quad I_2 = 4i + \frac{8}{\pi},\quad I_3 = \frac{8}{\pi} + 4i\left(1-\frac{2}{\pi}\right).$

Задача 9. *Разложить функцию в ряд Лорана в областях.*

$\frac{z-2}{z^2-z-12}$, 1) $3<|z|<4$ 2) $|z|>4$. 3) 0<|z+3|;

Решение. Корнями уравнения z^2-z-12=0 являются числа z_1=4 и z_2=-3. Разложим эту дробь на простые дроби: $\frac{z-2}{z^2-z-12}=\frac{A}{z-4}+\frac{B}{z+3}=\frac{A(z+3)+B(z-4)}{(z-4)(z+3)}$. Или

$A(z+3)+B(z-4)=z-2$. При z=4 получим A=2/7. Если положить z=-3, то получим B=5/7. Следовательно, $\frac{z-2}{z^2-z-12}=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{z-4}+\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{z+3}$. 1). В кольце $3<|z|<4$ имеем $\frac{3}{|z|}<1$ и $\frac{|z|}{4}<1$. Тогда дробь можно представить следующим образом:

$\frac{z-2}{z^2-z-12}=-\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{4(1-\frac{z}{4})}\frac{5}{7}\frac{1}{z(1+\frac{3}{z})}$. Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+...+q^n+...$, где $|q|<1$. В первой дроби q=z/4, во второй дроби q=-3/z. Следовательно,

$\frac{z-2}{z^2-z-12}=\frac{5}{7}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^{n-1}}{z^n}-\frac{2}{7}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}$. 2). В кольце $|z|>4$ выполняются неравенства $\frac{3}{|z|}<1$ и $\frac{4}{|z|}<1$. Следовательно,

$$\frac{z-2}{z^2-z--12}=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{4}{z})}+\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{z(1+\frac{3}{z})}=\frac{2}{7}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{z^n}+\frac{5}{7}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^{n-1}}{z^n}=\frac{1}{7}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot4^{n-1}+5\cdot(-3)^{n-1}}{z^n}$$

$3)0<|z+3|<7\Rightarrow\frac{|z+3|}{7}<1;$

$$\frac{z-2}{z^2-z-12}=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{z-4}+\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{z+3}=\frac{2}{7}\cdot\frac{-1}{7(1-\frac{z+3}{7})}+\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{z+3}=-\frac{2}{7}\sum_{1}^{\infty}\frac{(z+3)^n}{7^{n+1}}+\frac{5}{7}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}};$$

$$\frac{z-2}{z^2-z-12}=-\frac{2}{7}\sum_{1}^{\infty}\frac{(z+3)^n}{7^{n+1}}+\frac{5}{7}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}};$$

Ответ. 1). $\frac{z-2}{z^2-z-12}=\frac{5}{7}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^{n-1}}{z^n}-\frac{2}{7}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}$ в кольце $3<|z|<4$.

2). $\frac{z-2}{z^2-z--12}=\frac{1}{7}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot4^{n-1}+5\cdot(-3)^{n-1}}{z^n}$ в кольце $|z|>4$.

3) $\frac{z-2}{z^2-z-12}=-\frac{2}{7}\sum_{1}^{\infty}\frac{(z+3)^n}{7^{n+1}}+\frac{5}{7}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$; в кольце 0<|z+3|<7;

Задачи 10-11. *Вычислить интегралы с помощью вычетов.*

10. $\int\limits_{|z|=3}\frac{\sin^2\pi z}{(z-1)^2(z^2-1)}dz$ **11.** $\int\limits_{|z|=1}(z^6+z)\operatorname{sh}\frac{2}{z}dz$

Решение. **10.**. .Найдём корни знаменателя: $z_1=1$, $z_2=-1$. Значение $z_2=-1$ являются простым полюсом подынтегральной функции, а значение $z_1=1$ - полюсом кратности 3. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{-1}\frac{\sin^2\pi z}{(z-1)^2(z^2-1)}=\lim_{z\to-1}[\frac{(z+1)\sin^2\pi z}{(z-1)^3(z+1)}]=\lim_{z\to-1}[\frac{\sin^2\pi z}{(z-1)^3}]=-\frac{\sin^2\pi}{8}=0,$$

$$\operatorname*{Res}_{1}\frac{\sin^2\pi z}{(z-1)^3(z+1)}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to1}\frac{d^2}{dz^2}[(z-1)^3\frac{\sin^2\pi z}{(z-1)^3(z+1)}]=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}[\frac{\pi(z+1)\sin2\pi z-\sin^2\pi z}{(z+1)^2}]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}[\frac{(\pi\sin2\pi z+2\pi^2(z+1)\cos2\pi z-\pi\sin2\pi z)(z+1)^2-2(z+1)(\pi(z+1)\sin2\pi z-\sin^2\pi z)}{(z+1)^4}]=\frac{\pi^2}{2}.$$

Получим окончательно: $\int\limits_{|z|=3}\frac{\sin^2\pi z}{(z-1)^2(z^2-1)}dz=2\pi i\cdot(0+\frac{\pi^2}{2})=\pi^3 i$.

11. Подынтегральная функция имеет существенно особую точку z=0. Поэтому для вычисления вычета относительно этой точки следует разложить функцию в ряд Лорана. Воспользуемся разложением в ряд функции sh(w) по степеням w:

$sp(w)=w+\frac{w^3}{3!}+\frac{w^5}{5!}+\frac{w^7}{7!}+\ldots$ Полагая $w=\frac{2}{z}$, получим:

$$(z^6+z)\operatorname{sh}\frac{2}{z}=(z^6+z)\left[\frac{2}{z}+\frac{2^3}{3!z^3}+\frac{2^5}{5!z^5}+\frac{2^7}{7!z^7}+\ldots\right]=2z^5+2+\frac{2}{3}z^3+\frac{2}{3z^2}+\frac{4}{15}z+\frac{4}{15z^4}+$$

$$+\frac{8}{315z}+\frac{8}{315z^4}+\ldots$$

Коэффициентом при z^{-1} в разложении функции будет число 8/315. Вычет данной функции равен коэффициенту при z^{-1} в данном разложении, т.е. $\operatorname*{Res}_{0}[(z^6+z)\operatorname{sh}\frac{2}{z}]=\frac{8}{315}$.

Следовательно.

$$\int\limits_{|z|=1}(z^6+z)\operatorname{sh}\frac{2}{z}dz=2\pi i\cdot\frac{8}{315}=\frac{16}{315}\pi i.$$

Ответ. 10. $\int\limits_{|z|=3}\frac{\sin^2\pi z}{(z-1)^2(z^2-1)}dz=\pi^3 i$. 11. $\int\limits_{|z|=1}(z^6+z)\operatorname{sh}\frac{2}{z}dz=\frac{16}{315}\pi i$

Задача 12. *Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+2}{x^4+10x^2+9}dx.$$

Решение. Найдём корни знаменателя функции $f(z)=\frac{z^2+2}{z^4+10z^2+9}$, решая биквадратное уравнение: $(z^2)^2+10(z^2)+9=0$, $z^2=-5\pm\sqrt{25-9}=-5\pm4$. Следовательно, $z_{1,2}=\pm i$, $z_{1,2}=\pm3i$.

В верхней полуплоскости находятся два корня: $z_1=i$ $z_2=3i$ Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+2}{x^4+10x^2+9}dx=2\pi i(\operatorname*{Res}_{i}f(z)+\operatorname*{Res}_{3i}f(z)).$$

$$\operatorname*{Res}_{i}\frac{z^2+2}{z^4+10z^2+9}=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)(z^2+2)}{(z-i)(z+i)(z^2+9)}=\frac{1}{16i},\ \operatorname*{Res}_{3i}\frac{z^2+2}{z^4+10z^2+9}=\lim_{z\to3i}\frac{(z-3i)(z^2+2)}{(z-3i)(z+3i)(z^2+1)}=\frac{7}{48i}.$$

Следовательно. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+2}{x^4+10x^2+9)}dx=2\pi i(\frac{1}{16i}+\frac{7}{48i})=2\pi i\cdot\frac{10}{48i}=\frac{5\pi}{12}$.

Ответ. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2}{x^4+10x^2+9)} dx = \frac{5\pi}{12}.$

Задача 13. *Вычислить интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой C от точки z_1 до точки z_2.*

$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$, где C: $x=1-y^2$, $z_1=-i$, $z_2=i$, $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Решение. Точки z_1 и z_2 не являются особыми точками для подинтегральной функции. Следовательно, можно применить формулу Ньютона-Лейбница:

$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}\Big|_{z_1}^{z_2} = 2(\sqrt{z_2} - \sqrt{z_1})$. Рассмотрим функцию $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2})$.

Рассматривается та ветвь функции, для которой в точке z=i функция будет принимать заданное значение. С одной стороны

$\sqrt{i} = \cos\frac{\pi/2+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi/2+2k\pi}{2} = \cos(\frac{\pi}{4}+k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{4}+k\pi)$. С другой стороны

$\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})$. Сравнивая эти выражения, приходим к выводу, что указанной ветви функции соответствует значение k=0. Следовательно, данная ветвь функции имеет уравнение $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})$.

Таким образом, $\sqrt{z_1} = \sqrt{-i} = \sqrt{1}(\cos\frac{-\pi/2}{2} + i\sin\frac{-\pi/2}{2}) = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{z_2} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Следовательно,

$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}\Big|_{z_1}^{z_2} = 2(\sqrt{z_2} - \sqrt{z_1}) = 2(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{1-i}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}i$.

Ответ. $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}\Big|_{z_1}^{z_2} = 2\sqrt{2}\cdot i$.