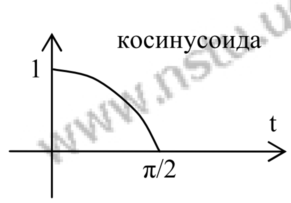
ВАРИАНТ 13
Задание 1-7

Найти изображения и указать, какими теоремами пользовались:

1) $f(t) = \sin 3t \cdot \cos t$; **2)** $f(t) = e^{-5t}\mathrm{sh}3t - t$; **3)** $f(t) = \int\limits_0^t t^3 e^{4t} dt$; **4)** $f(t) = \eta(t-5)\sin^2(t-5)$;

5) $f(t) = \int\limits_0^t \tau^3 \sin 3\tau d\tau$; **6)**



7) $f(t) = (2t^2 - 9t + 5)\eta(t-4)$.

РЕШЕНИЯ

1) $f(t) = \sin 3t \cdot \cos t$. Используем тригонометрическую формулу. Имеем:
$\sin 3t \cdot \cos t = \frac{1}{2}(\sin 2t + \sin 4t)$. По таблицам, $\sin 2t \risingdotseq \frac{2}{p^2+4}$ и $\sin 4t \risingdotseq \frac{4}{p^2+16}$. Далее, в силу свойства линейности, $\sin 3t \cdot \cos t \risingdotseq \frac{1}{2}(\frac{2}{p^2+4} + \frac{4}{p^2+16}) = \frac{3(p^2+8)}{(p^2+4)(p^2+16)}$.

<u>ОТВЕТ</u>: $\sin 3t \cdot \cos t \risingdotseq \frac{3(p^2+8)}{(p^2+4)(p^2+16)}$.

2) $f(t) = e^{-5t}\mathrm{sh}3t - t$. По таблице находим $t \risingdotseq \frac{1}{p^2}$ и $\mathrm{sh}3t \risingdotseq \frac{3}{p^2-9}$. Применение теоремы смещения даёт: $e^{-5t}\mathrm{sh}3t \risingdotseq \frac{3}{(p+5)^2-9}$ и, по свойству линейности получаем:

$$e^{-5t}\mathrm{sh}3t - t \risingdotseq \frac{3}{(p+5)^2-9} - \frac{1}{p^2} = \frac{3p^2 - p^2 - 10p - 25 + 9}{p^2[(p+5)^2-9]} = \frac{2p^2 - 10p - 16}{p^2[(p+5)^2-9]}.$$

ОТВЕТ: $e^{-5t}\mathrm{sh}3t - t \risingdotseq \frac{2p^2 - 10p - 16}{p^2[(p+5)^2-9]}$.

3) $f(t) = \int\limits_0^t t^3 e^{4t} dt$. По таблице находим $t^3 \risingdotseq \frac{3!}{p^4}$. Применяя теорему смещения, получим:
$t^3 e^{4t} \risingdotseq \frac{6}{(p-4)^4}$. По теореме интегрирования оригинала операции интегрирования оригинала соответствует деление изображения на p. Таким образом, $\int\limits_0^t t^3 e^{4t} dt \risingdotseq \frac{6}{p(p-4)^4}$.

ОТВЕТ: $\int\limits_0^t t^3 e^{4t} dt \risingdotseq \frac{6}{p(p-4)^4}$.

4) $f(t) = \eta(t-5)\sin^2(t-5)$. Воспользуемся формулой: $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$. По таблице находим $\cos 2t \risingdotseq \frac{p}{p^2+4}$ и $\frac{1}{2} \risingdotseq \frac{1}{2p}$ Тогда по свойству линейности получаем:

$\eta(t)\sin^2 t \risingdotseq \dfrac{1}{2p} - \dfrac{p}{2(p^2+4)}$. Или $\eta(t)\sin^2 t \risingdotseq \dfrac{p^2+4-p^2}{2p(p^2+4)} = \dfrac{2}{p(p^2+4)}$. Согласно теореме запаздывания $\eta(t-5)\sin^2(t-5) \risingdotseq \dfrac{2}{p(p^2+4)} \cdot e^{-5p}$.

ОТВЕТ: $\eta(t-5)\sin^2(t-5) \risingdotseq \dfrac{2}{p(p^2+4)} \cdot e^{-5p}$.

5) $f(t) = \int\limits_0^t \tau^3 \sin 5(t-\tau)d\tau$. Данный интеграл есть свёртка оригиналов t^3 и sin5t. Операции свёртки оригиналов соответствует умножение изображений. По таблице находим: $t^3 \risingdotseq \dfrac{3!}{p^4}$ и $\sin 5t \risingdotseq \dfrac{5}{p^2+25}$. Следовательно, $\int\limits_0^t \tau^3 \sin 5(t-\tau)d\tau \risingdotseq \dfrac{30}{p^4(p^2+25)}$.

ОТВЕТ: $\int\limits_0^t \tau^3 \sin 5(t-\tau)d\tau \risingdotseq \dfrac{30}{p^4(p^2+25)}$.

6) Аналитическая запись функции имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \cos t, & 0 \le t < \pi/2, \\ 0, & t \ge \pi/2. \end{cases}$$

Применяя функцию Хевисайда, данную функцию можно представить следующим образом: $f(t) = \cos t \cdot \eta(t) + \sin(t-\pi/2)\cdot\eta(t-\pi/2)$. Так как $\cos t = -\sin(t-\pi/2)$, то начиная с момента t=π/2 синусоиды уничтожаются. По таблице $\sin t \cdot \eta(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$, $\cos t \cdot \eta(t) \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+1}$.

Согласно теореме запаздывания $\sin(t-\pi/2)\cdot\eta(t-\pi/2) \risingdotseq \dfrac{e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1}$. По свойству линейности получим: $f(t) \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+1} + \dfrac{e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1} = \dfrac{p+e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1}$.

ОТВЕТ: $f(t) \risingdotseq \dfrac{p+e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1}$.

7) $f(t) = (2t^2 - 9t + 5)\eta(t-4)$. Разложим функцию $u(t)=2t^2-9t+5$ по степеням (t-4), пользуясь формулой Тейлора ($t_0=4$): $u(t)=u(t_0)+u'(t_0)(t-t_0)+\dfrac{u''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$. Имеем: $u'(t) = 4t-9$, $u''(t)=4$, $u'(4)=7$, $u(4)=1$. Тогда $u(t)=1+7(t-4)+2(t-4)^2$. Окончательно получаем:

f(t)=u(t)·η(t-4)=[1+7(t-4)+2(t-4)^2]·η(t-4).). По таблице $1\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$, $t\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2}$ и

$t^2\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{2}{p^3}$. Согласно теореме запаздывания $1\cdot\eta(t-4) \risingdotseq \frac{e^{-4p}}{p}$, $(t-4)\cdot\eta(t-4) \risingdotseq \frac{e^{-4p}}{p^2}$ и

$(t-4)^2\cdot\eta(t-4) \risingdotseq \frac{2e^{-4p}}{p^3}$. Применим свойство линейности:

$$f(t) \risingdotseq \frac{e^{-4p}}{p}+\frac{7e^{-4p}}{p^2}+\frac{4e^{-4p}}{p^3}=(\frac{1}{p}+\frac{7}{p^2}+\frac{4}{p^3})\cdot e^{-4p}.$$

ОТВЕТ: $f(t) \risingdotseq (\frac{1}{p}+\frac{7}{p^2}+\frac{4}{p^3})\cdot e^{-4p}$.

ЗАДАНИЕ 8

Найти оригинал по изображению, используя свойства преобразования Лапласа:

$$F(p)=\frac{d}{dp}\left(\frac{8}{(p-3)^2+4}\right).$$

РЕШЕНИЕ

Наличие слагаемого (p-3)^2 в сумме (p-3)^2+4, стоящей в знаменателе, говорит о том, что синус имеет смещение, т.е. нужно воспользоваться формулой $e^{\lambda p}\sin wt \risingdotseq \frac{w}{(p-\lambda)^2+w^2}$.

Действительно, $\frac{8}{(p-3)^2+4}=4\frac{2}{(p-3)^2+2^2} \risingdotseq 4e^{3t}\sin 2t$. По теореме о дифференцировании изображения

имеем: $\frac{d}{dp}\left(\frac{8}{(p-3)^2+4}\right) \risingdotseq -4te^{3t}\sin 2t$.

ОТВЕТ: $\frac{d}{dp}\left(\frac{8}{(p-3)^2+4}\right) \risingdotseq -4te^{3t}\sin 2t$.

ЗАДАНИЕ 9

Найти оригинал с помощью вычетов:

$$F(p)=\frac{1}{p^3-4p^2+13p}.$$

РЕШЕНИЕ

Для отыскания f(t) нужно найти сумму вычетов функции $F(p)\cdot e^{pt}$ во всех особых точках F(p). Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p(p^2-4p+13)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=2-3i$, $p_3=2+3i$. Все корни являются простыми полюсами для функции F(p). Для простого полюса справедливо следующее: если $\Phi(p)=\frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, а p_0

является простым полюсом Φ(p), то вычет можно вычислить по формуле $\operatorname*{res}_{p_0}\Phi(p)=\frac{\varphi(p_0)}{\psi'(p_0)}$.

В данном случае $\varphi(p)=e^{pt}$, $\psi(p)=p(p^2-4p+13)$ и $\psi'(p)=3p^2-8p+13$. Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=\frac{1}{13},\quad \operatorname*{res}_{p=2-3i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(2-3i)}{\psi'(2-3i)}=\frac{e^{(2-3i)t}}{3(2-3i)^2-8(2-3i)+13}=-\frac{e^{(2-3i)t}}{6(2i+3)},$$

$\underset{p=2+3i}{\mathrm{res}}[F(p)\cdot e^{pt}]=\dfrac{\varphi(2+3i)}{\psi'(2+3i)}=\dfrac{e^{(2+3i)t}}{3(2+3i)^2-8(2+3i)+13}=\dfrac{e^{(2+3i)t}}{6(2i-3)}$. Просуммируем все вычеты:

$\underset{p=0}{\mathrm{res}}[F(p)\cdot e^{pt}]+\underset{p=2-3i}{\mathrm{res}}[F(p)\cdot e^{pt}]+\underset{p=2+3i}{\mathrm{res}}[F(p)\cdot e^{pt}]=\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{e^{-3it}}{2i+3}+\dfrac{e^{3it}}{2i-3}\right)e^{2t}=$

$=\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{-e^{-3it}(2i-3)+e^{3it}(2i+3)}{13}\cdot e^{2t}=\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{39}(2i\cdot \mathrm{sh}(3it)+3\mathrm{ch}(3it))\cdot e^{2t}=$

$=\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{39}(3\cos 3t-2\sin 3t)\cdot e^{2t}$. Здесь учтено, что cos(t)=ch(it), а sin(t)=−i·sh(it).

ОТВЕТ: $\dfrac{1}{p^3-4p^2+13p}\risingdotseq\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{39}(3\cos 3t-2\sin 3t)\cdot e^{2t}$.

ЗАДАНИЕ 10

Найти оригинал, произведя разложение рациональной дроби на элементарные:

$$F(p)=\frac{-6e^{-6p}}{(p-2)(p+6)^2}.$$

РЕШЕНИЕ

Разложим функцию $\Phi(p)=\dfrac{-6}{(p-2)(p+6)^2}$ на простые дроби. Корнями знаменателя являются $p_1=2$, $p_2=-6$, причём корень $p_2=-6$ имеет кратность 2.

Следовательно, разложение имеет вид: $\dfrac{-6}{(p-2)(p+6)^2}=\dfrac{A}{p-2}+\dfrac{B}{p+6}+\dfrac{C}{(p+6)^2}$.

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим:

$$\frac{-6}{(p-2)(p+6)^2}=\frac{A(p+6)^2+B(p-2)(p+6)+C(p-2)}{(p-2)(p+6)^2}.$$

Знаменатели в обеих частях равны, следовательно, равны и числители:

$A(p+6)^2+B(p-2)(p+6)+C(p-2)=-6$. Придавая последовательно переменной p значения корней, найдём коэффициенты разложения A и C. Полагая p=2, получим A=-3/32, при p=-6 получим C=3/4. Приравнивая коэффициенты при p^2 в левой и правой частях равенства, найдём B: A+B=0 или B=-A=3/32. Таким образом,

$$\frac{-6}{(p-2)(p+6)^2}=-\frac{3}{32}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{32}\cdot\frac{1}{p+6}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(p+6)^2}.$$

Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим:

$\dfrac{-6}{(p-2)(p+6)^2}\risingdotseq-\dfrac{3}{32}e^{2t}+\dfrac{3}{32}\cdot e^{-6t}+\dfrac{3}{4}t\cdot e^{-6t}$. Зная оригинал для Φ(p), можно найти оригинал для $\Phi(p)e^{-8p}$, опираясь на теорему запаздывания:

$\dfrac{-6e^{-6p}}{(p-2)(p+6)^2}\risingdotseq-\dfrac{3}{32}e^{2(t-6)}+\dfrac{3}{32}\cdot e^{6(t-6)}+\dfrac{3}{4}(t-6)\cdot e^{6(t-6)}$. Или

$\dfrac{-6e^{-6p}}{(p-2)(p+6)^2}\risingdotseq-\dfrac{3}{32}e^{2(t-6)}+[\dfrac{3}{32}+\dfrac{3}{4}(t-6)]\cdot e^{-6(t-6)}=\dfrac{3(8t-47)}{32}\cdot e^{-6(t-6)}-\dfrac{3}{32}e^{2(t-6)}$

ОТВЕТ: $\dfrac{-6e^{-6p}}{(p-2)(p+6)^2}\risingdotseq\dfrac{3(8t-47)}{32}\cdot e^{-6(t-6)}-\dfrac{3}{32}e^{2(t-6)}$.

ЗАДАНИЯ 11, 12

Решить дифференциальные уравнения операционным методом:

11. $x''+2x'-3x=5\mathrm{sh}3t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=2$ **;** **12.** $x''+3x'=5\sin 2t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=0$ **.**

РЕШЕНИЯ.

11. $x''+2x'-3x=5\operatorname{sh}3t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=2$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-2$. По таблице $5\operatorname{sh}3t\risingdotseq\dfrac{15}{p^2-9}$. Получаем операторное

уравнение $p^2X(p)+2pX(p)-3X(p)-2=\dfrac{15}{p^2-9}$ или $X(p)[p^2+2p-3]=\dfrac{15}{p^2-9}+2$. Тогда

$X(p)=\dfrac{2p^2-3}{(p^2-9)[p^2+2p-3]}=\dfrac{2p^2-3}{(p-3)(p+3)^2(p-1)}$. Применим метод разложения на простые дроби:

$\dfrac{2p^2-3}{(p-3)(p+3)^2(p-1)}=\dfrac{A}{p-1}+\dfrac{B}{p-3}+\dfrac{C}{p+3}+\dfrac{D}{(p+3)^2}$. Отсюда

$2p^2-3=A(p-3)(p+3)^2+B(p-1)(p+3)^2+C(p-1)(p-3)(p+3)+D(p-1)(p-3)$. Если p=1, то

$A=\dfrac{1}{32}$, при $p=3$ получим $B=\dfrac{5}{24}$, при $p=-3$ получим $D=\dfrac{5}{8}$. Для определения C приравняем

коэффициенты при p^3: A+B+C=0. Отсюда $C=-\dfrac{23}{96}$. Таким образом,

$X(p)=\dfrac{1}{32(p-1)}+\dfrac{5}{24(p-3)}-\dfrac{23}{96(p+3)}+\dfrac{5}{8(p+3)^2}$. Пользуясь формулой $t^n\risingdotseq\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ и теоремой

смещения $t^ne^{\lambda t}\risingdotseq\dfrac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$, получим: $x(t)=\dfrac{1}{32}e^t+\dfrac{5}{24}e^{3t}-\dfrac{23}{96}e^{-3t}+\dfrac{5}{8}te^{-3t}$.

ОТВЕТ: $x(t)=\dfrac{1}{32}e^t+\dfrac{5}{24}e^{3t}-\dfrac{23}{96}e^{-3t}+\dfrac{5}{8}te^{-3t}$

12. $x''+3x'=5\sin 2t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=0$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)$. По таблице $5\sin2t\risingdotseq\dfrac{10}{p^2+4}$. Получаем операторное

уравнение $p^2X(p)+3pX(p)=\dfrac{10}{p^2+4}$ или $X(p)[p^2+3p]=\dfrac{10}{p^2+4}$. Тогда $X(p)=\dfrac{10}{p(p^2+4)(p+3)}$.

Применим метод разложения на простые дроби: $\dfrac{10}{p(p^2+4)(p+3)}=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p+3}+\dfrac{Cp+D}{p^2+4}$. Отсюда

$10=A(p+3)(p^2+4)+Bp(p^2+4)+(Cp+D)p(p+3)$. Если p=0, то $A=\dfrac{5}{6}$, при $p=-3$ получим $B=-\dfrac{10}{39}$.

Для определения C приравняем коэффициенты при p^3: A+B+C=0. Отсюда $C=-\dfrac{15}{26}$. Для определения D приравняем коэффициенты при p^2: 3A+3C+D=0. Отсюда $D=-\dfrac{10}{13}$. Таким

образом, $\dfrac{10}{p(p^2+4)(p+3)}=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{p}-\dfrac{10}{39}\cdot\dfrac{1}{p+3}-\dfrac{15}{26}\cdot\dfrac{p}{p^2+4}-\dfrac{10}{13}\cdot\dfrac{1}{p^2+4}$. Следовательно,

$x(t)=\dfrac{5}{6}-\dfrac{10}{39}e^{-3t}-\dfrac{15}{26}\cos2t-\dfrac{5}{13}\sin2t$.

ОТВЕТ: $x(t)=\dfrac{5}{6}-\dfrac{10}{39}e^{-3t}-\dfrac{15}{26}\cos2t-\dfrac{5}{13}\sin2t$

ЗАДАНИЕ 13

Решить систему уравнений с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases}x'-3x-3y=2e^t\\ y'+y+x=e^{-2t}\end{cases}\qquad x(0)=y(0)=0$$

РЕШЕНИЕ

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений. По теореме о дифференцировании оригинала $x'(t) \risingdotseq pX(p)$, $y'(t) \risingdotseq pY(p)$, а по таблице $e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}$, $e^{-2t} \risingdotseq \frac{1}{p+2}$.

Получили систему уравнений в изображениях:

$$\begin{cases} X(p)[p-3]-3Y(p)=\dfrac{2}{p-1} \\ X(p)+Y(p)[p+1]=\dfrac{1}{p+2} \end{cases}$$ Умножим первое уравнение на p+1, а второе – на 3, и сложим их.

Получим:

$$X(p)[p+1](p-3)+3X(p)=\frac{2(p+1)}{p-1}+\frac{3}{p+2}=\frac{2p^2+6p+4+3p-3}{(p-1)(p+2)} \quad \text{или} \quad p(p-2)X(p)=\frac{2p^2+9p+1}{(p-1)(p+2)}.$$ Тогда

$X(p)=\dfrac{2p^2+9p+1}{p(p-2)(p-1)(p+2)}$. Разложим правую часть на простые множители:

$$\frac{2p^2+9p+1}{p(p-2)(p-1)(p+2)}=$$

$$=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p-2}+\frac{D}{p+2}=\frac{A(p-2)(p-1)(p+2)+Bp(p-2)(p+2)+Cp(p+2)(p-1)+Dp(p-1)(p-2)}{p(p-1)(p-2)(p+2)}.$$

Приравняем числители:

$A(p-2)(p-1)(p+2)+Bp(p-2)(p+2)+Cp(p+2)(p-1)+Dp(p-1)(p-2)=2p^2+9p+1$. Полагая p=0, находим A=1/4, при p=1 получим B=-4, при p=2 находим C=27/8, при p=-2 находим D=3/8. Таким образом, $X(p)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}-4\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{27}{8}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{p+2}$. Следовательно,

$x(t)=\frac{1}{4}-4e^t+\frac{27}{8}e^{2t}+\frac{3}{8}e^{-2t}$. Из первого уравнения ситемы следует, что

$y(t)=\frac{1}{3}x'(t)-x(t)-\frac{2}{3}e^t$, т.е.

$$y(t)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-4e^t+\frac{27}{8}e^{2t}+\frac{3}{8}e^{-2t}\right)'-\frac{1}{4}+4e^t-\frac{27}{8}e^{2t}-\frac{3}{8}e^{-2t}-\frac{2}{3}e^t=-\frac{1}{4}+2e^t-\frac{9}{8}e^{2t}-\frac{5}{8}e^{-2t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} x(t)=\frac{1}{4}-4e^t+\frac{27}{8}e^{2t}+\frac{3}{8}e^{-2t} \\ y(t)=-\frac{1}{4}+2e^t-\frac{9}{8}e^{2t}-\frac{5}{8}e^{-2t} \end{cases}$.

ЗАДАНИЕ 14

Операторным методом с применением интеграла Дюамеля найти токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ *в индуктивно связанных цепях (см. схему), вызвынных напряжением u(t). Параметры цепей:* L_1, L_2 (Гн), R_1, R_2 (Ом), M (Гн). *Начальные условия* $i_1(0)=0, i_1(0)=0.$

$$L_1=L_2=2,\ R_1=10,\ R_2=10,\ M=2; \qquad u(t)=\begin{cases} e^t-1, & 0\le t<2 \\ e^{-t}+2\operatorname{sh}2-1, & t\ge 2 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ

Индуктивно связанные цепи описываются следующей системой уравнений:

$\begin{cases} L_1\dfrac{di_1}{dt}+R_1i_1+M\dfrac{di_2}{dt}=u(t) \\ L_2\dfrac{di_2}{dt}+R_2i_2+M\dfrac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$ В данном случае $\begin{cases} 2\dfrac{di_1}{dt}+10i_1+2\dfrac{di_2}{dt}=u(t) \\ 2\dfrac{di_2}{dt}+10i_2+2\dfrac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$ Пусть $u(t)\risingdotseq U(p)$, $i_1(t)\risingdotseq I_1(p)$ и $i_2(t)\risingdotseq I_2(p)$. Тогда $\dfrac{di_1}{dt}\risingdotseq pI_1(p)$ и $\dfrac{di_2}{dt}\risingdotseq pI_2(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений $\begin{cases} 2pI_1(p)+10I_1(p)+2pI_2(p)=U \\ 2pI_2(p)+10I_2(p)+2pI_1(p)=0 \end{cases}$. Заменим функцию u(t) единичной функцией η(t), для которой $\eta(t)\risingdotseq\dfrac{1}{p}$, и рассмотрим другую систему $\begin{cases} 2pX_1(p)+10X_1(p)+2pX_2(p)=\dfrac{1}{p} \\ 2pX_2(p)+10X_2(p)+2pX_1(p)=0 \end{cases}$, в которой $X_1(p)$ и $X_2(p)$ – изображения некоторых функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Выразим $X_2(p)$ из второго уравнения $X_2(p)=-\dfrac{pX_1(p)}{p+5}$ и подставим в первое. Получим:

$X_1(p)[2p+10-\dfrac{2p^2}{p+5}]=\dfrac{1}{p}$ или $X_1(p)\dfrac{10(2p+5)}{p+5}=\dfrac{1}{p}$. Отсюда $X_1(p)=\dfrac{p+5}{10p(2p+5)}$. Для обращения функции применим метод разложения дроби на простейшие дроби. Очевидно, что $\dfrac{p+5}{10p(2p+5)}=\dfrac{p+5}{20p(p+\frac{5}{2})}=\dfrac{1}{20}(\dfrac{2}{p}-\dfrac{1}{p+\frac{5}{2}})$. Следовательно, $x_1(t)=\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}t}$.

Изображение $I_1(p)$ связано с изображением $X_1(p)$ формулой $I_1(p) = pX_1(p)U(p)$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_1(0)=1/20$, получим: $i_1(t)=u(t)x_1(0)+\int\limits_0^t u(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$.

Поскольку $x_1'(t)=\left(\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}t}\right)'=\dfrac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}$, то при t<2

$$i_1(t)=\frac{1}{20}(e^t-1)+\int\limits_0^t(e^\tau-1)\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{20}(e^t-1)+\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}(\frac{2}{7}e^{\frac{7}{2}\tau}-\frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}\tau})\Big|_0^t=$$

$$=\frac{1}{20}e^t-\frac{1}{20}+\frac{1}{28}e^t-\frac{1}{20}-\frac{1}{8}(\frac{2}{7}-\frac{2}{5})e^{-\frac{5}{2}t}=-\frac{1}{10}+\frac{3}{35}e^t+\frac{1}{70}e^{-\frac{5}{2}t}.$$

. При t≥2 получим:

$$i_1(t)=\frac{1}{20}(e^{-t}+2\operatorname{sh}2-1)+\int\limits_0^2(e^\tau-1)\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau+\int\limits_2^t(e^{-\tau}+2\operatorname{sh}2-1)\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{20}(e^{-t}+2\operatorname{sh}2-1)+$$

$$+\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}(\frac{2}{7}e^{\frac{7}{2}\tau}-\frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}\tau})\Big|_0^2+\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}\cdot\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}\tau}\Big|_2^t+\frac{2\operatorname{sh}2-1}{8}\cdot\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}\Big|_2^t=\frac{1}{20}(e^{-t}+2\operatorname{sh}2-1)+\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}(\frac{2}{7}e^7-\frac{2}{5}e^5)-$$

$$-\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}(\frac{2}{7}-\frac{2}{5})+\frac{1}{12}e^{-t}-\frac{1}{12}e^{-\frac{5}{2}t}+\frac{2\operatorname{sh}2-1}{20}(1-e^{-\frac{5}{2}t+5})=\frac{2\operatorname{sh}2-1}{10}+\frac{2}{15}e^{-t}-(\frac{e^7-1}{70}+\frac{e^3}{30})e^{-\frac{5}{2}t}.$$

Найдём $x_2(t)$: $X_2(p)=-\dfrac{pX_1(p)}{p+5}=-\dfrac{p}{p+5}\cdot\dfrac{p+5}{10p(2p+5)}=-\dfrac{1}{10(2p+5)}$, т.е. $x_2(t)=-\dfrac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}t}$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_2(0)=-1/20$, получим: $i_2(t)=u(t)x_2(0)+\int\limits_0^t u(\tau)x_2'(t-\tau)d\tau$.

Поскольку $x_2'(t)=\left(-\frac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}t}\right)'=\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}$, то при 0≤t<2

$$i_2(t)=-\frac{1}{20}(e^t-1)+\int_0^t(e^t-1)\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau=-\frac{1}{20}(e^t-1)+\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}\left(\frac{2}{7}e^{\frac{7}{2}\tau}-\frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}\tau}\right)\Big|_0^t=-\frac{1}{70}(e^t-e^{-\frac{5}{2}t}).$$

При t≥2

$$i_2(t)=-\frac{1}{20}(e^{-t}+2sh2-1)+\int_0^2(e^{\tau}-1)\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau+\int_2^t(e^{-\tau}+2sh2-1)\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau=-\frac{1}{20}(e^{-t}+2sh2-1)+$$

$$+\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}\left(\frac{2}{7}e^{\frac{7}{2}\tau}-\frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}\tau}\right)\Big|_0^2+\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}\cdot\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}\tau}\Big|_2^t+\frac{2sh2-1}{8}\cdot\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}\Big|_2^t=-\frac{1}{20}(e^{-t}+2sh2-1)+\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}\left(\frac{2}{7}e^7-\frac{2}{5}e^5\right)-$$

$$-\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{5}\right)+\frac{1}{12}e^{-t}-\frac{1}{12}e^{-\frac{5}{2}t}+\frac{2sh2-1}{20}(1-e^{-\frac{5}{2}t+5})=\frac{1}{30}e^{-t}-\left(\frac{e^7-1}{70}+\frac{e^3}{30}\right)e^{-\frac{5}{2}t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} i_1(t)=-\frac{1}{10}+\frac{3}{35}e^t+\frac{1}{70}e^{-\frac{5}{2}t} \\ i_2(t)=-\frac{1}{70}(e^t-e^{-\frac{5}{2}t}) \end{cases}$ при 0≤t<2 и $\begin{cases} i_1(t)=\frac{2sh2-1}{10}+\frac{2}{15}e^{-t}-\left(\frac{e^7-1}{70}+\frac{e^3}{30}\right)e^{-\frac{5}{2}t} \\ i_2(t)=\frac{1}{30}e^{-t}-\left(\frac{e^7-1}{70}+\frac{e^3}{30}\right)e^{-\frac{5}{2}t} \end{cases}$ при t≥2.

ЗАДАНИЕ 15

Решить уравнение с переменными коэффициентами: $tx''+(6t-1)x'+3(3t-1)x=0.$

РЕШЕНИЕ

Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)$, $x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)$. Воспользуемся свойством дифференцирования изображения: $tf(t)\risingdotseq-\frac{d}{dp}F(p)$. В данном случае $tx(t)\risingdotseq-\frac{dX}{dp}$,

$tx'(t)\risingdotseq-\frac{d}{dp}\{pX-x(0)\}=-(X+p\frac{dX}{dp})$, $tx''\risingdotseq-\frac{d}{dp}\{p^2X-px(0)-x'(0)\}=-(2pX+p^2\frac{dX}{dp}-x(0))$. Учитывая это, получаем операторное уравнение:

$-(2pX+p^2\frac{dX}{dp}-x(0))-(pX-x(0))-6(X+p\frac{dX}{dp})-9\frac{dX}{dp}-3X=0$. Или

$(-p^2-6p-9)\frac{dX}{dp}-3(p+3)X+2x(0)=-(p+3)^2\frac{dX}{dp}-3(p+3)X+2x(0)=0$. Таким образом, получилось линейное дифференциальное уравнение $\frac{dX}{dp}+\frac{3}{(p+3)}X=\frac{2x(0)}{(p+3)^2}$. Применим метод Бернулли.

Если $X(p)=U\cdot V$, то U и V определяются соответственно уравнениями:

$\frac{dU}{dp}+\frac{3}{(p+3)}U=0;\quad UV'=\frac{2x(0)}{(p+3)^2}$. Таким образом, $\frac{dU}{U}=-\frac{3dp}{p+3};\quad \ln|U|=-3\ln|p+3|;\quad U(p)=\frac{1}{(p+3)^3}$.

Подставим это во второе уравнение:

$\frac{V'}{(p+3)^3}=\frac{2x(0)}{(p+3)^2}$ или $V'=2x(0)(p+3)$. Тогда $V=x(0)(p+3)^2+C$. Следовательно,

$X(p)=\frac{x(0)(p+3)^2+C}{(p+3)^3}=\frac{x(0)}{p+3}+\frac{C}{2}\cdot\frac{2}{(p+3)^3}$ Переходя к оригиналу, получим $x(t)=e^{-3t}(x(0)+Ct^2)$.

ОТВЕТ: $x(t)=e^{-3t}(x(0)+Ct^2)$.

ЗАДАНИЕ 16

Решить операционным методом уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=a(x+y),\quad u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=b.$$

РЕШЕНИЕ

Пусть $u(x,y)\risingdotseq U(x,p)$. Тогда $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\risingdotseq pU(x,p)-u(x,0)=pU(x,p)-b$. Запишем операторное уравнение:

$\frac{dU}{dx}+pU-b=\frac{ax}{p}+\frac{a}{p^2}$ или $\frac{dU}{dx}+pU=\frac{ax}{p}+\frac{a}{p^2}+b$. Это линейное уравнение первого порядка. Его решение имеет вид: $U(x,p)=C(x,p)e^{-px}$, где C(x,p) – функция, определяемая из уравнения $C'(x,p)e^{-px}=\frac{ax}{p}+\frac{a}{p^2}+b$, т.е. $C(x,p)=\int(\frac{ax}{p}+\frac{a}{p^2}+b)e^{px}dx=(\frac{ax}{p^2}+\frac{b}{p})e^{px}+C_1$.

Следовательно, решением уравнения будет

$U(x,p)=C(x,p)e^{-px}=[(\frac{ax}{p^2}+\frac{b}{p})e^{px}+C_1]e^{-px}=\frac{ax}{p^2}+\frac{b}{p}+C_1e^{-px}$. Пользуясь граничным условием $U(x,p)\big|_{x=0}=\frac{b}{p}$, найдём $C_1=0$. Следовательно, $U(x,p)=\frac{ax}{p^2}+\frac{b}{p}$. Оригинал функции находим по таблицам: $u(x,y)=axy+b$.

ОТВЕТ: $u(x,t)=b+axy$