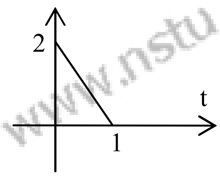
ВАРИАНТ 16
Задание 1-7

Найти изображения и указать, какими теоремами пользовались:

1) $f(t) = \mathrm{sh}\,2t \cdot \mathrm{ch}\,3t;$ **2)** $f(t) = e^{-2t} \cdot \cos 2t - \sin 2t;$ **3)** $f(t) = \int\limits_0^t t^4 e^{-3t} dt;$ **4)** $f(t) = \eta(t-4)\cos^2(t-4);$

5) $f(t) = \int\limits_0^t \tau^2 \mathrm{sh}3(t-\tau)d\tau;$ **6)**



7) $f(t) = (t^2 - 8t + 7)\eta(t-7).$

РЕШЕНИЯ

1) $f(t) = \mathrm{sh}\,2t \cdot \mathrm{ch}\,3t.$ Используем формулу для произведения гиперболических функций. Имеем: $\mathrm{sh}\,2t \cdot \mathrm{ch}\,3t = \frac{1}{2}(\mathrm{sh}(-t) + \mathrm{sh}5t) = \frac{1}{2}(-\mathrm{sh}\,t + \mathrm{sh}5t).$ По таблицам, $\mathrm{sh}\,t \risingdotseq \frac{1}{p^2 - 1}$ и

$\mathrm{sh}5t \risingdotseq \frac{5}{p^2 - 25}$. Далее, в силу свойства линейности,

$$\mathrm{sh}\,2t \cdot \mathrm{ch}\,3t \risingdotseq \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{p^2 - 1} + \frac{5}{p^2 - 25}\right) = \frac{2(p^2 + 5)}{(p^2 - 1)(p^2 - 25)}.$$

<u>ОТВЕТ</u>: $\mathrm{sh}2t \cdot \mathrm{ch}3t \risingdotseq \frac{2(p^2 + 5)}{(p^2 - 1)(p^2 - 25)}$.

2) $f(t) = e^{-2t} \cdot \cos 2t - \sin 2t.$ По таблице находим $\cos 2t \risingdotseq \frac{p}{p^2 + 4}$ и $\sin 2t \risingdotseq \frac{2}{p^2 + 4}$. Применение теоремы смещения даёт: $e^{-2t}\cos 2t \risingdotseq \frac{p+2}{(p+2)^2 + 4}$ и, по свойству линейности получаем:

$$f(t) = e^{-2t} \cdot \cos 2t - \sin 2t \risingdotseq \frac{p+2}{(p+2)^2 + 4} - \frac{2}{p^2 + 4} =$$

$$= \frac{p^3 + 2p^2 + 4p + 8 - 2p^2 - 8p + 8 - 8}{[(p+2)^2 + 4](p^2 + 4)} = \frac{p^3 - 4p - 8}{[(p+2)^2 + 4](p^2 + 4)}.$$

ОТВЕТ: $e^{-2t} \cdot \cos 2t - \sin 2t \risingdotseq \frac{p^3 - 4p - 8}{[(p+2)^2 + 4](p^2 + 4)}$.

3) $f(t) = \int\limits_0^t t^4 e^{-3t} dt.$ По таблице находим $t^4 \risingdotseq \frac{4!}{p^5}$. Применяя теорему смещения, получим:

$t^4 e^{-3t} \risingdotseq \frac{24}{(p+3)^5}$. По теореме интегрирования оригинала операции интегрирования оригинала соответствует деление изображения на р. Таким образом,

$$\int\limits_0^t t^4 e^{-3t} dt \risingdotseq \frac{24}{p(p+3)^5}.$$

ОТВЕТ: $\int\limits_0^t t^4 e^{-3t} dt \risingdotseq \frac{24}{p(p+3)^5}$.

4) $f(t)=\eta(t-4)\cos^2(t-4)$. Воспользуемся формулой: $\cos^2 t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t$. По таблице находим $\cos 2t \risingdotseq \frac{p}{p^2+4}$ и $\frac{1}{2}\risingdotseq\frac{1}{2p}$ Тогда по свойству линейности получаем:

$\eta(t)\cos^2 t \risingdotseq \frac{1}{2p}+\frac{p}{2(p^2+4)}$. Или $\eta(t)\cos^2 t \risingdotseq \frac{p^2+4+p^2}{2p(p^2+4)}=\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$. Согласно теореме запаздывания $\eta(t-4)\cos^2(t-4)\risingdotseq\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}\cdot e^{-4p}$.

ОТВЕТ: $\eta(t-4)\cos^2(t-4)\risingdotseq\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}\cdot e^{-4p}$.

5) $f(t)=\int_0^t \tau^2 \operatorname{sh}3(t-\tau)d\tau$. Данный интеграл есть свёртка оригиналов t^2 и sh3t. Операции свёртки оригиналов соответствует умножение изображений. По таблице находим: $t^2\risingdotseq\frac{2}{p^3}$ и

$\operatorname{sh}3t\risingdotseq\frac{3}{p^2-9}$. Следовательно, $\int_0^t \tau^2\operatorname{sh}3\tau d\tau\risingdotseq\frac{2\cdot 3}{p^2(p^2-9)}=\frac{6}{p^3(p^2-9)}$.

ОТВЕТ: $\int_0^t \tau^2\operatorname{sh}3\tau d\tau\risingdotseq\frac{6}{p^3(p^2-9)}$.

6) Аналитическая запись функции имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 2(1-t), & 0\le t<1,\\ 0, & t\ge 1.\end{cases}$$

Применяя функцию Хевисайда, данную функцию можно представить следующим образом: $f(t)=2(1-t)\cdot\eta(t)+2(t-1)\cdot\eta(t-1)=2\cdot\eta(t)-2t\cdot\eta(t)+2(t-1)\cdot\eta(t-1)$. Так как $2(1-t)+2(t-1)=0$, то начиная с момента t=1 функция становится равной нулю. По таблице $2t\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{2}{p^2}$ и $2\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{2}{p}$. Согласно теореме запаздывания $2(t-1)\cdot\eta(t-1)\risingdotseq\frac{2e^{-p}}{p^2}$.

По свойству линейности получим: $f(t)\risingdotseq\frac{2}{p}-\frac{2}{p^2}+\frac{2e^{-p}}{p}=\frac{2(p-1+e^{-p})}{p^2}$.

ОТВЕТ: $f(t)\risingdotseq\frac{2(p-1+e^{-p})}{p^2}$.

7) $f(t)=(t^2-8t+7)\eta(t-7)$. Разложим функцию $u(t)=t^2-8t+7$ по степеням (t-7), пользуясь формулой Тейлора ($t_0=7$): $u(t)=u(t_0)+u'(t_0)(t-t_0)+\frac{u''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$. Имеем: $u'(t)=2t-8$, $u''(t)=2$, $u'(7)=6$, $u(7)=0$. Тогда $u(t)=6(t-7)+(t-7)^2$. Окончательно получаем:

f(t)=u(t)·η(t-7)=[6(t-7)+$(t-7)^2$]·η(t-7).). По таблице $t\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2}$ и $t^2\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{2}{p^3}$. Согласно теореме запаздывания $(t-7)\cdot\eta(t-7) \risingdotseq \frac{e^{-7p}}{p^2}$ и $(t-7)^2\cdot\eta(t-7) \risingdotseq \frac{2e^{-7p}}{p^3}$. Применим свойство линейности: $f(t) \risingdotseq \frac{6e^{-7p}}{p^2}+\frac{2e^{-7p}}{p^3}=(\frac{6}{p^2}+\frac{2}{p^3})\cdot e^{-7p}$.

ОТВЕТ: $f(t) \risingdotseq (\frac{6}{p^2}+\frac{2}{p^3})\cdot e^{-7p}$.

ЗАДАНИЕ 8

Найти оригинал по изображению, используя свойства преобразования Лапласа:

$$F(p)=\frac{d}{dp}\left(\frac{3(p+1)}{(p+1)^2-9}\right).$$

РЕШЕНИЕ

Наличие слагаемого $(p+1)^2$ в сумме $(p+1)^2$-9, стоящей в знаменателе, говорит о том, что косинус имеет смещение, т.е. нужно воспользоваться формулой $e^{\lambda p}\operatorname{ch} wt \risingdotseq \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-w^2}$.

Действительно, $\frac{3(p+1)}{(p+1)^2-9}=3\frac{p+1}{(p+1)^2-3^2} \risingdotseq 3e^{-t}\operatorname{ch}3t$. По теореме о дифференцировании изображения имеем: $\frac{d}{dp}\left(\frac{3(p+1)}{(p+1)^2-9}\right) \risingdotseq -3te^{-t}\operatorname{ch}3t$.

ОТВЕТ: $\frac{d}{dp}\left(\frac{3(p+1)}{(p+1)^2-9}\right) \risingdotseq -3te^{-t}\operatorname{ch}3t$.

ЗАДАНИЕ 9

Найти оригинал с помощью вычетов:

$$F(p)=\frac{1}{p^3+6p^2+13p}.$$

РЕШЕНИЕ

Для отыскания f(t) нужно найти сумму вычетов функции $F(p)\cdot e^{pt}$ во всех особых точках F(p). Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p(p^2+6p+13)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=-3-2i$, $p_3=-3+2i$. Все корни являются простыми полюсами для функции F(p). Для простого полюса справедливо следующее: если $\Phi(p)=\frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, а p_0 является простым полюсом Φ(p), то вычет можно вычислить по формуле $\operatorname*{res}_{p_0}\Phi(p)=\frac{\varphi(p_0)}{\psi'(p_0)}$.

В данном случае $\varphi(p)=e^{pt}$, $\psi(p)=p(p^2+6p+13)$ и $\psi'(p)=3p^2+12p+13$. Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=\frac{1}{13},$$

$$\operatorname*{res}_{p=-3-2i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(-3-2i)}{\psi'(-3-2i)}=\frac{e^{(-3-2i)t}}{3(-3-2i)^2+12(-3-2i)+13}=\frac{e^{(-3-2i)t}}{4(3i-2)},$$

$\underset{p=-3+2i}{\mathrm{res}}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(-3+2i)}{\psi'(-3+2i)}=\frac{e^{(-3+2i)t}}{3(-3+2i)^2+12(-3+2i)+13}=-\frac{e^{(-3+2i)t}}{4(3i+2)}$. Просуммируем все вычеты:

$$\underset{p=0}{\mathrm{res}}[F(p)\cdot e^{pt}]+\underset{p=-3-2i}{\mathrm{res}}[F(p)\cdot e^{pt}]+\underset{p=-3+2i}{\mathrm{res}}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{1}{13}+\frac{1}{4}\left(\frac{e^{-2it}}{3i-2}-\frac{e^{2it}}{3i+2}\right)e^{-3t}=$$

$$=\frac{1}{13}-\frac{1}{4}\cdot\frac{e^{-2it}(3i+2)-e^{2it}(3i-2)}{13}\cdot e^{-3t}=\frac{1}{13}-\frac{1}{26}(-3i\cdot sh(2it)+2ch(2it))\cdot e^{-3t}=$$

$=\frac{1}{13}-\frac{1}{26}(2\cos 2t+3\sin 2t)\cdot e^{-3t}$. Здесь учтено, что cos(t)=ch(it), а sin(t)=–i·sh(it).

ОТВЕТ: $\frac{1}{p^3+6p^2+13p}\risingdotseq\frac{1}{13}-\frac{1}{26}(2\cos 2t+3\sin 2t)\cdot e^{-3t}$.

ЗАДАНИЕ 10

Найти оригинал, произведя разложение рациональной дроби на элементарные:

$$F(p)=\frac{p^2-3p-2}{(p+1)(p^2+9)}.$$

РЕШЕНИЕ

Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $(p+1)(p^2+9)=0$ следует, что корнями являются $p_1=-1$, $p_2=-3i$, $p_3=3i$. Следовательно, разложение имеет вид:

$$\frac{p^2-3p-2}{(p+1)(p^2+9)}=\frac{A}{p+1}+\frac{Bp+C}{p^2+9}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим:

$$\frac{p^2-3p-2}{(p+1)(p^2+9)}=\frac{A(p^2+9)+(Bp+C)(p+1)}{(p^2+9)(p+1)}.$$

Знаменатели в обеих частях равны, следовательно, равны и числители:
$A(p^2+9)+(Bp+C)(p+1)=p^2-3p-2$. Полагая p=-1, получим A=1/5. Приравнивая коэффициенты при p^2 в левой и правой частях равенства, найдём B: A+B=1 или B=1-A=4/5. Приравнивая коэффициенты при p в левой и правой частях равенства, найдём C: B+C=-3 или

C=-3-B=-3-4/5=-19/5. Таким образом, $\frac{p^2-3p-2}{(p+1)(p^2+9)}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{4}{5}\cdot\frac{p}{p^2+1}-\frac{19}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}$.

Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим:
$\frac{p^2-3p-2}{(p+1)(p^2+9)}\risingdotseq\frac{1}{5}\cdot e^{-t}+\frac{4}{5}\cdot\cos 3t-\frac{19}{15}\sin 3t$.

ОТВЕТ: $\frac{p^2-3p-2}{(p+1)(p^2+9)}\risingdotseq\frac{1}{5}\cdot e^{-t}+\frac{4}{5}\cdot\cos 3t-\frac{19}{15}\sin 3t$.

ЗАДАНИЯ 11, 12

Решить дифференциальные уравнения операционным методом:

11. $x''-x'-6x=-2sh3t,\quad x(0)=0, x'(0)=-2$; **12.** $x''+4x'+3x=2\sin 2t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=0$.

РЕШЕНИЯ.

11. $x''-x'-6x=-2sh3t,\quad x(0)=0, x'(0)=-2$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+2$. По таблице -2sh3t$\risingdotseq-\frac{6}{p^2-9}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p)-pX(p)-6X(p)+2=-\frac{6}{p^2-9}$ или $X(p)[p^2-p-6]=-\frac{6}{p^2-9}-2$. Тогда

$X(p)=\frac{-2p^2+12}{(p^2-9)[p^2-p-6]}=\frac{-2p^2+12}{(p+3)(p-3)^2(p+2)}$. Применим метод разложения на простые дроби:

$\frac{-2p^2+12}{(p+3)(p-3)^2(p+2)}=\frac{A}{p+3}+\frac{B}{p+2}+\frac{C}{p-3}+\frac{D}{(p-3)^2}$. Отсюда

$-2p^2+12=A(p+2)(p-3)^2+B(p+3)(p-3)^2+C(p+2)(p-3)(p+3)+D(p+3)(p+2)$. Если p=-3, то

$A=\frac{1}{6}$, при $p=-2$ получим $B=\frac{4}{25}$, при $p=3$ получим $D=-\frac{1}{5}$. Для определения C приравняем коэффициенты при p^3: A+B+C=0. Отсюда $C=-\frac{49}{150}$. Таким образом,

$X(p)=\frac{1}{6(p+3)}+\frac{4}{25(p+2)}-\frac{49}{150(p-3)}-\frac{1}{5(p-3)^2}$. Пользуясь формулой $t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$ и теоремой смещения $t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$, получим: $x(t)=\frac{1}{6}e^{-3t}+\frac{4}{25}e^{-2t}-\frac{49}{150}e^{2t}-\frac{1}{5}te^{3t}$.

ОТВЕТ: $x(t)=\frac{1}{6}e^{-3t}+\frac{4}{25}e^{-2t}-\frac{30t+49}{150}e^{3t}$

12. $x''+4x'+3x=2\sin 2t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=0$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)$. По таблице 2sin2t$\risingdotseq\frac{4}{p^2+4}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p)+4pX(p)+3X(p)=\frac{4}{p^2+4}$ или $X(p)[p^2+4p+3]=\frac{4}{p^2+4}$. Тогда

$X(p)=\frac{4}{(p+1)(p+3)(p^2+4)}$. Применим метод разложения на простые дроби:

$\frac{4}{(p+1)(p+3)(p^2+4)}=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p+3}+\frac{Cp+D}{p^2+4}$. Отсюда

$4=A(p+3)(p^2+4)+B(p+1)(p^2+4)+(Cp+D)(p+1)(p+3)$. Если p=-1, то

$A=\frac{2}{5}$, при $p=-3$ получим $B=-\frac{2}{13}$. Для определения C приравняем коэффициенты при p^3:

A+B+C=0. Отсюда $C=-\frac{16}{65}$. Для определения D приравняем коэффициенты при p^2:

3A+B+4C+D=0. Отсюда $D=-\frac{4}{65}$. Таким образом,

$\frac{4}{(p+1)(p^2+4)(p+3)}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{p+3}-\frac{16}{65}\cdot\frac{p}{p^2+4}-\frac{2}{65}\cdot\frac{2}{p^2+4}$. Следовательно,

$x(t)=\frac{2}{5}e^{-t}-\frac{2}{13}e^{-3t}-\frac{16}{65}\cos 2t-\frac{2}{65}\sin 2t$.

ОТВЕТ: $x(t)=\frac{2}{5}e^{-t}-\frac{2}{13}e^{-3t}-\frac{2}{65}\sin 2t-\frac{16}{65}\cos 2t$

ЗАДАНИЕ 13

Решить систему уравнений с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} x'+3x+3y=e^t \\ y'+2y+2x=e^{2t} \end{cases}\quad x(0)=y(0)=0$$

РЕШЕНИЕ

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений. По теореме о дифференцировании оригинала $x'(t) \risingdotseq pX(p)$, $y'(t) \risingdotseq pY(p)$, а по таблице $e^{2t} \risingdotseq \frac{1}{p-2}$, $e^{t} \risingdotseq \frac{1}{p-1}$.

Получили систему уравнений в изображениях:

$$\begin{cases} X(p)[p+3]+3Y(p)=\dfrac{1}{p-1} \\ 2X(p)+Y(p)[p+2]=\dfrac{1}{p-2} \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на p+2, а второе – на 3, затем вычтем из первого уравнения второе. Получим:

$X(p)[p+2](p+3)-6X(p)=\frac{p+2}{p-1}-\frac{3}{p-2}=\frac{p^2-4-3p+3}{(p-1)(p-2)}$ или $p(p+5)X(p)=\frac{p^2-3p-1}{(p-1)(p-2)}$. Тогда

$X(p)=\frac{p^2-3p-1}{p(p+5)(p-1)(p-2)}$. Разложим правую часть на простые множители:

$$\frac{p^2-3p-1}{p(p+5)(p-1)(p-2)}=$$

$$=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p-2}+\frac{D}{p+5}=\frac{A(p-1)(p+5)(p-2)+Bp(p-2)(p+5)+Cp(p-1)(p+5)+Dp(p-1)(p-2)}{p(p-1)(p-2)(p+5)}.$$

Приравняем числители:

$A(p-1)(p+5)(p-2)+Bp(p-2)(p+5)+Cp(p-1)(p+5)+Dp(p-1)(p-2)=p^2-3p-1$. Полагая p=0, находим A=-1/10, при p=1 получим B=1/2, при p=2 находим C=-3/14, при p=-5 находим D=-13/70. Таким образом, $X(p)=-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{3}{14}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{13}{70}\cdot\frac{1}{p+5}$. Следовательно,

$x(t)=-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}e^{t}-\frac{3}{14}e^{2t}-\frac{13}{70}e^{-5t}$. Из первого уравнения ситемы следует, что

$y(t)=\frac{1}{3}e^{t}-\frac{1}{3}x'(t)-x(t)$, т.е.

$$y(t)=\frac{1}{3}e^{t}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}e^{t}-\frac{3}{14}e^{2t}-\frac{13}{70}e^{-5t}\right)'+\frac{1}{10}-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{3}{14}e^{2t}+\frac{13}{70}e^{-5t}=\frac{1}{10}-\frac{1}{3}e^{t}+\frac{5}{14}e^{2t}-\frac{13}{105}e^{-5t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} x(t)=-\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{2}e^{t}-\dfrac{3}{14}e^{2t}-\dfrac{13}{70}e^{-5t} \\ y(t)=\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{3}e^{t}+\dfrac{5}{14}e^{2t}-\dfrac{13}{105}e^{-5t} \end{cases}$.

ЗАДАНИЕ 14

Операторным методом с применением интеграла Дюамеля найти токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ *в индуктивно связанных цепях (см. схему), вызвынных напряжением u(t). Параметры цепей:* L_1, L_2 (Гн), R_1, R_2 (Ом), M (Гн). *Начальные условия* $i_1(0)=0, i_1(0)=0$.

$L_1=1,\ L_2=\frac{4}{3},\ R_1=\frac{3}{2},\ R_2=2,\ M=\frac{1}{\sqrt{3}};\qquad u(t)=\begin{cases}40t, & 0\le t<4\\ 160, & t\ge 4\end{cases}$

РЕШЕНИЕ

Индуктивно связанные цепи описываются следующей системой уравнений:

$\begin{cases} L_1\dfrac{di_1}{dt}+R_1 i_1+M\dfrac{di_2}{dt}=u(t) \\ L_2\dfrac{di_2}{dt}+R_2 i_2+M\dfrac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$ В данном случае $\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt}+\dfrac{3}{2}i_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{di_2}{dt}=u(t) \\ \dfrac{4}{3}\dfrac{di_2}{dt}+2i_2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$ Пусть $u(t)\doteqdot U(p)$, $i_1(t)\doteqdot I_1(p)$ и $i_2(t)\doteqdot I_2(p)$. Тогда $\dfrac{di_1}{dt}\doteqdot pI_1(p)$ и $\dfrac{di_2}{dt}\doteqdot pI_2(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений $\begin{cases} pI_1(p)+\dfrac{3}{2}I_1(p)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}pI_2(p)=U \\ \dfrac{4}{3}pI_2(p)+2I_2(p)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}pI_1(p)=0 \end{cases}$. Заменим функцию u(t) единичной функцией η(t), для которой $\eta(t)\doteqdot\dfrac{1}{p}$, и рассмотрим другую систему $\begin{cases} pX_1(p)+\dfrac{3}{2}X_1(p)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}pX_2(p)=\dfrac{1}{p} \\ \dfrac{4}{3}pX_2(p)+2X_2(p)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}pX_1(p)=0 \end{cases}$, в которой $X_1(p)$ и $X_2(p)$ – изображения некоторых функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Выразим $X_2(p)$ из второго уравнения $X_2(p)=-\dfrac{pX_1(p)}{\sqrt{3}(\frac{4}{3}p+2)}$ и подставим в первое. Получим:

$X_1(p)[p+\dfrac{3}{2}-\dfrac{p^2}{4p+6}]=\dfrac{1}{p}$ или $X_1(p)\dfrac{3(p^2+4p+3)}{2(2p+3)}=\dfrac{1}{p}$. Отсюда

$X_1(p)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2p+3}{p(p^2+4p+3)}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2p+3}{p(p+1)(p+3)}$. Для обращения функции применим метод разложения дроби на простейшие дроби: $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2p+3}{p(p^2+4p+3)}=\dfrac{2}{3}\cdot(\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p+1}+\dfrac{C}{p+3})$. Или

$A(p+1)(p+3)+Bp(p+3)+Cp(p+1)=2p+3$. Полагая p=0, находим A=1, полагая p=-1, находим B=-1/2, при p=-3, определяем C=-1/2. Тогда

$X_1(p)=\dfrac{2}{3}\cdot(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2(p+1)}-\dfrac{1}{2(p+3)})=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{p+1}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{p+3}$. Следовательно, $x_1(t)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}(e^{-t}+e^{-3t})$.

Изображение $I_1(p)$ связано с изображением $X_1(p)$ формулой $I_1(p) = pX_1(p)U(p)$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_1(0)=0$, получим: $i_1(t)=\int\limits_0^t u(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$. Поскольку

$x_1'(t)=\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}(e^{-t}+e^{-3t})\right)'=\dfrac{1}{3}e^{-t}+e^{-3t}$, то при t<4

$$i_1(t)=\int\limits_0^t 40\tau\cdot[\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)}+e^{-3(t-\tau)}]d\tau=\frac{40}{3}e^{-t}\cdot(\tau-1)e^{\tau}\Big|_0^t+40e^{-3t}(\frac{\tau}{3}-\frac{1}{9})e^{3\tau}\Big|_0^t=\frac{80}{3}t-\frac{160}{9}+\frac{40}{3}e^{-t}+\frac{40}{9}e^{-3t}.$$

При t≥4 получим:

$$i_1(t)=\int\limits_0^4 40\tau\cdot[\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)}+e^{-3(t-\tau)}]d\tau+\int\limits_4^t 160\cdot[\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)}+e^{-3(t-\tau)}]d\tau=\frac{40}{3}e^{-t}\cdot(\tau-1)e^{\tau}\Big|_0^4+40e^{-3t}(\frac{\tau}{3}-\frac{1}{9})e^{3\tau}\Big|_0^4+$$

$$+[\frac{160}{3}e^{-(t-\tau)}+\frac{160}{3}e^{-3(t-\tau)}]\Big|_4^t=40e^{-t+4}+\frac{40}{3}e^{-t}+40\cdot\frac{11}{9}e^{-3t+12}+\frac{40}{9}e^{-3t}+\frac{160}{3}-\frac{160}{3}e^{-t+4}+\frac{160}{3}-\frac{160}{3}e^{-3t+12}=$$

$$=\frac{320}{3}+\frac{40}{3}(1-e^4)e^{-t}+\frac{40}{9}(1-e^{12})e^{-3t}.$$

Найдём $x_2(t)$:

$$X_2(p) = -\frac{pX_1(p)}{\sqrt{3}(\frac{4}{3}p+2)} = \frac{p}{\sqrt{3}(\frac{4}{3}p+2)}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2p+3}{p(p+1)(p+3)} = -\frac{1}{\sqrt{3}(p+1)(p+3)} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+3}),$$

т.е. $x_2(t) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(e^{-t}-e^{-3t})$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_2(0)=0$, получим: $i_2(t) = \int_0^t u(\tau)x_2'(t-\tau)d\tau$. Поскольку $x_2'(t) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}(e^{-t}-e^{-3t})\right)' = \frac{1}{2\sqrt{3}}(e^{-t}-3e^{-3t})$, то при $0\le t<4$

$$i_2(t) = \int_0^t 40\tau\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}(e^{-(t-\tau)}-3e^{-3(t-\tau)})d\tau = \frac{20}{\sqrt{3}}e^{-t}\cdot(\tau-1)e^{\tau}\Big|_0^t - 20\sqrt{3}e^{-3t}(\frac{\tau}{3}-\frac{1}{9})e^{3\tau}\Big|_0^t = \frac{20}{\sqrt{3}}t-\frac{20}{\sqrt{3}}+\frac{20}{\sqrt{3}}e^{-t}-\frac{20}{\sqrt{3}}t+$$

$$+\frac{20}{3\sqrt{3}}-\frac{20}{3\sqrt{3}}e^{-3t} = -\frac{40}{3\sqrt{3}}+\frac{20}{\sqrt{3}}e^{-t}-\frac{20}{3\sqrt{3}}e^{-3t}.$$ При $t\ge 4$

$$i_2(t) = \int_0^4 40\tau\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}[e^{-(t-\tau)}-3e^{-3(t-\tau)}]d\tau+\int_0^t 160\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}[e^{-(t-\tau)}-3e^{-3(t-\tau)}]d\tau = \frac{20}{\sqrt{3}}e^{-t}\cdot(\tau-1)e^{\tau}\Big|_0^4 -$$

$$-20\sqrt{3}e^{-3t}(\frac{\tau}{3}-\frac{1}{9})e^{3\tau}\Big|_0^4+[\frac{80}{\sqrt{3}}e^{-(t-\tau)}-\frac{80}{\sqrt{3}}e^{-3(t-\tau)}]\Big|_4^t = 20\sqrt{3}e^{-t+4}+\frac{20}{\sqrt{3}}e^{-t}-20\sqrt{3}\cdot\frac{11}{9}e^{-3t+12}-\frac{20\sqrt{3}}{9}e^{-3t}+$$

$$+\frac{80}{\sqrt{3}}-\frac{80}{\sqrt{3}}-\frac{80}{\sqrt{3}}e^{-t+4}+\frac{80}{\sqrt{3}}e^{-3t+12} = \frac{20}{\sqrt{3}}(1-e^{4})e^{-t}-\frac{20}{3\sqrt{3}}(1-e^{12})e^{-3t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} i_1(t) = \frac{80}{3}t-\frac{160}{9}+\frac{40}{3}e^{-t}+\frac{40}{9}e^{-3t} \\ i_2(t) = -\frac{40}{3\sqrt{3}}+\frac{20}{\sqrt{3}}e^{-t}-\frac{20}{3\sqrt{3}}e^{-3t}\end{cases}$ при $0\le t<4$ и $\begin{cases} i_1(t) = \frac{320}{3}+\frac{40}{3}(1-e^{4})e^{-t}+\frac{40}{9}(1-e^{12})e^{-3t} \\ i_2(t) = \frac{20}{\sqrt{3}}(1-e^{4})e^{-t}-\frac{20}{3\sqrt{3}}(1-e^{12})e^{-3t}\end{cases}$ при $t\ge 4$.

ЗАДАНИЕ 15

Решить уравнение с переменными коэффициентами: $tx''-(2t+1)x'+(t+1)x=0.$

РЕШЕНИЕ

Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)$, $x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)$. Воспользуемся свойством дифференцирования изображения: $tf(t)\risingdotseq -\frac{d}{dp}F(p)$. В данном случае $tx(t)\risingdotseq -\frac{dX}{dp}$,

$tx'(t)\risingdotseq -\frac{d}{dp}\{pX-x(0)\} = -(X+p\frac{dX}{dp})$, $tx''\risingdotseq -\frac{d}{dp}\{p^2X-px(0)-x'(0)\} = -(2pX+p^2\frac{dX}{dp}-x(0))$. Учитывая это, получаем операторное уравнение:

$-(2pX+p^2\frac{dX}{dp}-x(0))-(pX-x(0))+2(X+p\frac{dX}{dp})-\frac{dX}{dp}+X=0$. Или

$(-p^2+2p-1)\frac{dX}{dp}-3(p-1)X+2x(0) = -(p-1)^2\frac{dX}{dp}-3(p-1)X+2x(0)=0$. Таким образом, получилось линейное дифференциальное уравнение $\frac{dX}{dp}+\frac{3}{(p-1)}X = \frac{2x(0)}{(p-1)^2}$. Применим метод Бернулли.

Если $X(p)=U\cdot V$, то U и V определяются соответственно уравнениями:

$\frac{dU}{dp}+\frac{3}{(p-1)}U=0;\quad UV'=\frac{2x(0)}{(p-1)^2}$. Таким образом, $\frac{dU}{U}=-\frac{3dp}{p-1};\quad \ln|U|=-3\ln|p-1|;\quad U(p)=\frac{1}{(p-1)^3}$.

Подставим это во второе уравнение:

$\frac{V'}{(p-1)^3}=\frac{2x(0)}{(p-1)^2}$ или $V'=2x(0)(p-1)$. Тогда $V=x(0)(p-1)^2+C$. Следовательно,

$X(p)=\frac{x(0)(p-1)^2+C}{(p-1)^3}=\frac{x(0)}{p-1}+\frac{C}{2!}\cdot\frac{2!}{(p-1)^3}$ Переходя к оригиналу, получим $x(t)=e^t(x(0)+Ct^2)$.

ОТВЕТ: $x(t)=e^t(x(0)+Ct^2)$.

ЗАДАНИЕ 16

Решить операционным методом уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}=x+y,\quad (ax\ge 0,\ y\ge 0),\quad u\big|_{x=0}=b,\ u\big|_{y=0}=c.$$

РЕШЕНИЕ

Пусть $u(x,y)\risingdotseq U(x,p)$. Тогда $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\risingdotseq pU(x,p)-u(x,0)=pU(x,p)-c$. Запишем операторное уравнение: $\frac{dU}{dx}+apU-ac=\frac{x}{p}+\frac{1}{p^2}$ или $\frac{dU}{dx}+apU=\frac{x}{p}+\frac{1}{p^2}+ac$. Это линейное уравнение первого порядка. Его решение имеет вид: $U(x,p)=C(x,p)e^{-apx}$, где C(x,p) – функция, определяемая из уравнения $C'(x,p)e^{-apx}=\frac{x}{p}+\frac{1}{p^2}+ac$, т.е.

$C(x,p)=\int(\frac{x}{p}+\frac{1}{p^2}+ac)e^{apx}dx=(\frac{x}{ap^2}-\frac{1}{a^2p^3}+\frac{1}{ap^3}+\frac{c}{p})e^{apx}+C_1$. Следовательно, решением уравнения будет

$U(x,p)=C(x,p)e^{-apx}=[(\frac{x}{ap^2}-\frac{1}{a^2p^3}+\frac{1}{ap^3}+\frac{c}{p})e^{apx}+C_1]e^{-apx}=\frac{x}{ap^2}+\frac{a-1}{a^2p^3}+\frac{c}{p}+C_1e^{-apx}$. Пользуясь граничным условием $U(x,p)\big|_{x=0}=\frac{b}{p}$, найдём $C_1=\frac{b-c}{p}-\frac{a-1}{a^2p^3}$. Следовательно,

$U(x,p)=\frac{x}{ap^2}+\frac{a-1}{a^2p^3}+\frac{c}{p}+[\frac{b-c}{p}-\frac{a-1}{a^2p^3}e^{-apx}$. Оригинал функции находим по таблицам:

$u(x,y)=c+\frac{xy}{a}+\frac{a-1}{2a^2}y^2+(b-c)\eta(y-ax)+\frac{1-a}{2a^2}(y-ax)^2\eta(y-ax)$.

ОТВЕТ: $u(x,y)=c+\frac{xy}{a}+\frac{a-1}{2a^2}y^2+(b-c)\eta(y-ax)+\frac{1-a}{2a^2}(y-ax)^2\eta(y-ax)$.