ВАРИАНТ 17

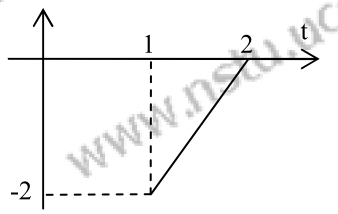
Задание 1-7

Найти изображения и указать, какими теоремами пользовались:

1) $f(t) = \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} 2t$; **2)** $f(t) = e^{-t}\cos 2t + 2\sin t$; **3)** $f(t) = \int\limits_0^t \tau^2 e^{-2\tau} d\tau$; **4)** $f(t) = \eta(t-5)\cos^2(t-5)$;

5) $f(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^3 \operatorname{sh} 5\tau d\tau$;

6)



7) $f(t) = (3t^2 + 7e - 8)\eta(t-2)$.

РЕШЕНИЯ

1) $f(t) = \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} 2t$. Используем формулу для произведения гиперболических функций. Имеем: $\operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} 2t = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(-t) + \operatorname{sh}3t) = \frac{1}{2}(-\operatorname{sh} t + \operatorname{sh}3t)$. По таблицам, $\operatorname{sh} t \risingdotseq \frac{1}{p^2-1}$ и $\operatorname{sh}3t \risingdotseq \frac{3}{p^2-9}$. Далее, в силу свойства линейности, $\operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} 2t \risingdotseq \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{p^2-1} + \frac{3}{p^2-9}\right) = \frac{p^2+3}{(p^2-1)(p^2-9)}$.

<u>ОТВЕТ</u>: $\operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} 2t \risingdotseq \frac{p^2+3}{(p^2-1)(p^2-9)}$.

2) $f(t) = e^{-t}\cos 2t + 2\sin t$. По таблице находим $\cos 2t \risingdotseq \frac{p}{p^2+4}$ и $\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$. Применение теоремы смещения даёт: $e^{-t}\cos 2t \risingdotseq \frac{p+1}{(p+1)^2+4}$ и, по свойству линейности получаем:

$$e^{-t}\cdot\cos 2t + 2\sin t \risingdotseq \frac{p+1}{(p+1)^2+4} + \frac{2}{p^2+1} = \frac{p^3+p^2+p+1+2p^2+4p+2+8}{[(p+1)^2+4](p^2+1)} = \frac{p^3+3p^2+5p+11}{[(p+1)^2+4](p^2+1)}.$$

ОТВЕТ: $e^{-t}\cdot\cos 2t + 2\sin t \risingdotseq \frac{p^3+3p^2+5p+11}{[(p+1)^2+4](p^2+1)}$.

3) $f(t) = \int\limits_0^t t^4 e^{4t} dt$. По таблице находим $t^4 \risingdotseq \frac{4!}{p^5}$. Применяя теорему смещения, получим: $t^4 e^{4t} \risingdotseq \frac{24}{(p-4)^5}$. По теореме интегрирования оригинала операции интегрирования оригинала соответствует деление изображения на p. Таким образом, $\int\limits_0^t t^4 e^{4t} dt \risingdotseq \frac{24}{p(p-4)^5}$.

ОТВЕТ: $\int\limits_0^t t^4 e^{4t} dt \risingdotseq \frac{24}{p(p-4)^5}$.

4) $f(t) = \eta(t-5)\cos^2(t-5)$. Воспользуемся формулой: $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$. По таблице находим $\cos 2t \risingdotseq \frac{p}{p^2+4}$ и $\frac{1}{2} \risingdotseq \frac{1}{2p}$ Тогда по свойству линейности получаем:

$\eta(t)\cos^2 t \risingdotseq \dfrac{1}{2p} + \dfrac{p}{2(p^2+4)}$. Или $\eta(t)\cos^2 t \risingdotseq \dfrac{p^2+4+p^2}{2p(p^2+4)} = \dfrac{p^2+2}{p(p^2+4)}$. Согласно теореме запаздывания $\eta(t-5)\cos^2(t-5) \risingdotseq \dfrac{p^2+2}{p(p^2+4)} \cdot e^{-5p}$.

ОТВЕТ: $\eta(t-5)\cos^2(t-5) \risingdotseq \dfrac{p^2+2}{p(p^2+4)} \cdot e^{-5p}$.

5) $f(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^3 \operatorname{sh}5\tau d\tau$. Данный интеграл есть свёртка оригиналов t^3 и $\operatorname{sh}5t$. Операции свёртки оригиналов соответствует умножение изображений. По таблице находим: $t^3 \risingdotseq \dfrac{3!}{p^4}$ и $\operatorname{sh}5t \risingdotseq \dfrac{5}{p^2-25}$. Следовательно, $\int\limits_0^t (t-\tau)^3 \operatorname{sh}5\tau d\tau \risingdotseq \dfrac{6\cdot 5}{p^4(p^2-25)} = \dfrac{30}{p^4(p^2-25)}$.

ОТВЕТ: $\int\limits_0^t (t-\tau)^3 \operatorname{sh}5\tau d\tau \risingdotseq \dfrac{30}{p^4(p^2-25)}$.

6) Аналитическая запись функции имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 2(t-2), & 1 \le t < 2, \\ 0, & t \ge 2. \end{cases}$$

Применяя функцию Хевисайда, данную функцию можно представить следующим образом: $f(t) = 2(t-2)\cdot\eta(t-1) - 2(t-2)\cdot\eta(t-2) = 2(t-1)\cdot\eta(t-1) - 2\cdot\eta(t-1) - 2(t-2)\cdot\eta(t-2)$. Так как $-2(t-1) = -2(t-2) - 2$, то начиная с момента t=2 функция становится равной нулю. По таблице $t\cdot\eta(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p^2}$ и $1\cdot\eta(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p}$. Согласно теореме запаздывания $(t-1)\cdot\eta(t-1) \risingdotseq \dfrac{e^{-p}}{p^2}$, $(t-2)\cdot\eta(t-2) \risingdotseq \dfrac{e^{-2p}}{p^2}$ и $\eta(t-1) \risingdotseq \dfrac{e^{-p}}{p}$. По свойству линейности получим:

$f(t) \risingdotseq \dfrac{2e^{-p}}{p^2} - \dfrac{2e^{-2p}}{p^2} - \dfrac{2e^{-p}}{p} = \dfrac{-2[p-1+e^{-p}]}{p^2}\cdot e^{-p}$.

ОТВЕТ: $f(t) \risingdotseq \dfrac{-2[p-1+e^{-p}]}{p^2}\cdot e^{-p}$.

7) $f(t) = (\dfrac{t^2}{4} - 3t + 7)\eta(t-8)$. Разложим функцию $u(t) = (\dfrac{t^2}{4} - 3t + 7)$ по степеням (t-8), пользуясь формулой Тейлора (t_0=8): $u(t)=u(t_0)+u'(t_0)(t-t_0) + \dfrac{u''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$. Имеем: $u'(t) = \dfrac{1}{2}t - 3$, $u''(t) = \dfrac{1}{2}$, $u'(8) = 1$, u(8)=-1. Тогда u(t)=-1+(t-9)+$(t-9)^2$/4. Окончательно получаем:

f(t)=u(t)·η(t-8)=[-1+(t-8)+(t-8)^2/4]·η(t-8).). По таблице $1\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$, $t\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2}$ и $t^2\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{2}{p^3}$.

Согласно теореме запаздывания $1\cdot\eta(t-8) \risingdotseq \frac{e^{-8p}}{p}$, $(t-8)\cdot\eta(t-8) \risingdotseq \frac{e^{-8p}}{p^2}$ и

$(t-8)^2\cdot\eta(t-8) \risingdotseq \frac{2e^{-8p}}{p^3}$. Применим свойство линейности:

$$f(t) \risingdotseq \frac{-e^{-8p}}{p}+\frac{e^{-8p}}{p^2}+\frac{2e^{-98p}}{4p^3}=\left(\frac{1}{2p^3}+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}\right)\cdot e^{-8p}.$$

ОТВЕТ: $f(t) \risingdotseq \left(\frac{1}{2p^3}+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}\right)\cdot e^{-8p}$.

ЗАДАНИЕ 8

Найти оригинал по изображению, используя свойства преобразования Лапласа:

$$F(p)=\frac{d}{dp}\left(\frac{4(p-3)}{(p-3)^2-4}\right).$$

РЕШЕНИЕ

Наличие слагаемого $(p-3)^2$ в сумме $(p-3)^2-4$, стоящей в знаменателе, говорит о том, что косинус имеет смещение, т.е. нужно воспользоваться формулой $e^{\lambda p}\cos wt \risingdotseq \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-w^2}$.

Действительно, $\frac{4(p-3)}{(p-3)^2-4}=4\frac{p-3}{(p-3)^2-2^2} \risingdotseq 4e^{3t}\operatorname{ch}2t$. По теореме о дифференцировании изображения имеем: $\frac{d}{dp}\left(\frac{4(p-3)}{(p-3)^2-4}\right) \risingdotseq -4te^{3t}\operatorname{ch}2t$.

ОТВЕТ: $\frac{d}{dp}\left(\frac{4(p-3)}{(p-3)^2-4}\right) \risingdotseq -4te^{3t}\operatorname{ch}2t$.

ЗАДАНИЕ 9

Найти оригинал с помощью вычетов: $F(p)=\frac{1}{p^3+6p^2+18p}$.

РЕШЕНИЕ

Для отыскания f(t) нужно найти сумму вычетов функции $F(p)\cdot e^{pt}$ во всех особых точках F(p). Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p(p^2+6p+18)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=-3-3i$, $p_3=-3+3i$. Все корни являются простыми полюсами для функции F(p). Для простого полюса справедливо следующее: если $\Phi(p)=\frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, а p_0 является простым полюсом Φ(p), то вычет можно вычислить по формуле $\operatorname*{res}_{p_0}\Phi(p)=\frac{\varphi(p_0)}{\psi'(p_0)}$. В данном случае $\varphi(p)=e^{pt}$, $\psi(p)=p(p^2+6p+18)$ и $\psi'(p)=3p^2+12p+18$. Следовательно, $\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=\frac{1}{18}$,

$$\operatorname*{res}_{p=-3-3i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(-3-3i)}{\psi'(-3-3i)}=\frac{e^{(-3-3i)t}}{3(-3-3i)^2+12(-3-3i)+18}=\frac{e^{(-3-3i)t}}{18(i-1)},$$

$$\operatorname*{res}_{p=-3+3i}[F(p)\cdot e^{pt}] = \frac{\varphi(-3+3i)}{\psi'(-3+3i)} = \frac{e^{(-3+3i)t}}{3(-3+3i)^2+12(-3+3i)+18} = -\frac{e^{(-3+3i)t}}{18(i+1)}$$. Просуммируем все вычеты:

$$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}] + \operatorname*{res}_{p=-3-3i}[F(p)\cdot e^{pt}] + \operatorname*{res}_{p=-3+3i}[F(p)\cdot e^{pt}] = \frac{1}{18}+\frac{1}{18}\left(\frac{e^{-3it}}{i-1}-\frac{e^{3it}}{i+1}\right)e^{-3t} =$$

$$= \frac{1}{18}-\frac{1}{18}\cdot\frac{e^{-3it}(i+1)-e^{3it}(i-1)}{2}\cdot e^{-3t} = \frac{1}{18}-\frac{1}{18}(-i\cdot \mathrm{sh}(3it)+\mathrm{ch}(3it))\cdot e^{-3t} =$$

$= \frac{1}{18}-\frac{1}{18}(\cos 3t+\sin 3t)\cdot e^{-3t}$. Здесь учтено, что cos(t)=ch(it), а sin(t)=−i·sh(it).

ОТВЕТ: $\dfrac{1}{p^3+6p^2+18p} \fallingdotseq = \dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{18}(\cos 3t+\sin 3t)\cdot e^{-3t}$.

ЗАДАНИЕ 10

Найти оригинал, произведя разложение рациональной дроби на элементарные:

$$F(p) = \frac{5e^{-5p}}{(p-3)(p-4)^2}.$$

РЕШЕНИЕ

Разложим функцию $\Phi(p) = \dfrac{5}{(p-3)(p-4)^2}$ на простые дроби. Корнями знаменателя являются $p_1=3$, $p_2=4$, причём корень $p_2=4$ имеет кратность 2.

Следовательно, разложение имеет вид: $\dfrac{5}{(p-3)(p-4)^2} = \dfrac{A}{p-3}+\dfrac{B}{p-4}+\dfrac{C}{(p-4)^2}$.

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим:

$$\frac{5}{(p-3)(p-4)^2} = \frac{A(p-4)^2+B(p-3)(p-4)+C(p-3)}{(p-3)(p-4)^2}.$$

Знаменатели в обеих частях равны, следовательно, равны и числители:
$A(p-4)^2+B(p-3)(p-4)+C(p-3)=5$. Придавая последовательно переменной p значения корней, найдём коэффициенты разложения A и C. Полагая p=3, получим A=5, при p=4 получим C=5. Приравнивая коэффициенты при p^2 в левой и правой частях равенства, найдём B: A+B=0 или B=-A=-5. Таким образом,

$$\frac{5}{(p-3)(p-4)^2} = 5\cdot\frac{1}{p-1}-5\cdot\frac{1}{p-4}+5\cdot\frac{1}{(p-4)^2}.$$

Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим:
$\dfrac{5}{(p-3)(p-4)^2} \fallingdotseq 5e^{t}-5\cdot e^{4t}+5t\cdot e^{4t}$. Зная оригинал для Ф(p), можно найти оригинал для

$\Phi(p)e^{-5p}$, опираясь на теорему запаздывания: $\dfrac{5e^{-5p}}{(p-3)(p-4)^2} \fallingdotseq 5e^{(t-5)}-5\cdot e^{4(t-5)}+5(t-5)\cdot e^{4(t-5)}$. Или

$$\frac{5e^{-5p}}{(p-3)(p-4)^2} \fallingdotseq 5e^{(t-5)}+[5(t-5)-5]\cdot e^{4(t-5)} = 5e^{(t-5)}+5(t-6)\cdot e^{4(t-5)}$$

ОТВЕТ: $\dfrac{5e^{-5p}}{(p-3)(p-4)^2} \fallingdotseq 5e^{(t-5)}+5(t-6)\cdot e^{4(t-5)}$.

ЗАДАНИЯ 11, 12

Решить дифференциальные уравнения операционным методом:

11. $x''-3x'-4x=-3\,\mathrm{sh}4t, \quad x(0)=0,\ x'(0)=0$ **;** **12.** $x''+3x'+2x=3\sin 3t, \quad x(0)=0,\ x'(0)=0$ **.**

РЕШЕНИЯ.

11. $x'' - 3x' - 4x = -2\operatorname{sh}4t,\quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \risingdotseq X(p)$, то $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p)$,

$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p)$. По таблице -3sh4t$\risingdotseq -\dfrac{12}{p^2-16}$. Получаем операторное

уравнение $p^2X(p) - 3pX(p) - 4X(p) = -\dfrac{12}{p^2-16}$ или $X(p)[p^2 - 3p - 4] = -\dfrac{-12}{p^2-16}$. Тогда

$X(p) = \dfrac{-12}{(p^2-16)[p^2-3p-4]} = \dfrac{-12}{(p+1)(p+4)^2(p-4)}$. Применим метод разложения на простые дроби:

$\dfrac{-12}{(p+1)(p+4)^2(p-4)} = \dfrac{A}{p+1} + \dfrac{B}{p-4} + \dfrac{C}{p+4} + \dfrac{D}{(p+4)^2}$. Отсюда

$-12 = A(p-4)(p+4)^2 + B(p+1)(p+4)^2 + C(p+1)(p-4)(p+4) + D(p+1)(p-4)$. Если p=-1, то

$A = \dfrac{4}{15}$, при $p = 4$ получим $B = -\dfrac{12}{40}$, при $p = -4$ получим $D = \dfrac{1}{2}$. Для определения C приравняем

коэффициенты при p^3: A+B+C=0. Отсюда $C = \dfrac{1}{30}$. Таким образом,

$X(p) = \dfrac{4}{45(p+1)} - \dfrac{12}{40(p-4)} + \dfrac{1}{30(p+4)} + \dfrac{1}{2(p+4)^2}$. Пользуясь формулой $t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$ и теоремой

смещения $t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \dfrac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$, получим: $x(t) = \dfrac{4}{15}e^{-t} - \dfrac{3}{10}e^{4t} + \dfrac{1}{30}e^{-4t} + \dfrac{1}{2}te^{-4t}$.

ОТВЕТ: $x(t) = \dfrac{4}{15}e^{-t} - \dfrac{3}{10}e^{4t} + \dfrac{1}{30}(15t+1)e^{-4t}$. (Расхождение в ответах за счёт разных начальных условий).

12. $x'' + 3x' + 2x = 3\sin 3t,\quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0$**.** Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \risingdotseq X(p)$, то $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p)$,

$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p)$. По таблице 3sin3t$\risingdotseq \dfrac{9}{p^2+9}$. Получаем операторное

уравнение $p^2X(p) + 3pX(p) + 2X(p) = \dfrac{9}{p^2+9}$ или $X(p)[p^2 + 3p + 2] = \dfrac{9}{p^2+9}$. Тогда

$X(p) = \dfrac{9}{(p+1)(p+2)(p^2+9)}$. Применим метод разложения на простые дроби:

$\dfrac{9}{(p+1)(p+2)(p^2+9)} = \dfrac{A}{p+1} + \dfrac{B}{p+2} + \dfrac{Cp+D}{p^2+9}$. Отсюда

$9 = A(p+2)(p^2+9) + B(p+1)(p^2+9) + (Cp+D)(p+1)(p+2)$. Если p=-1, то

$A = \dfrac{9}{10}$, при $p = -2$ получим $B = -\dfrac{9}{13}$. Для определения C приравняем коэффициенты при p^3:

A+B+C=0. Отсюда $C = -\dfrac{27}{130}$. Для определения D приравняем коэффициенты при p^2:

2A+B+3C+D=0. Отсюда $D = \dfrac{63}{130}$. Таким образом,

$\dfrac{9}{(p+1)(p^2+9)(p+2)} = \dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{1}{p+1} - \dfrac{9}{13}\cdot\dfrac{1}{p+2} - \dfrac{27}{130}\cdot\dfrac{p}{p^2+9} - \dfrac{21}{130}\cdot\dfrac{3}{p^2+9}$. Следовательно,

$x(t) = \dfrac{9}{10}e^{-t} - \dfrac{9}{13}e^{-2t} - \dfrac{21}{130}\sin 3t - \dfrac{27}{130}\cos 3t$.

ОТВЕТ: $x(t) = \dfrac{9}{10}e^{-t} - \dfrac{9}{13}e^{-2t} - \dfrac{21}{130}\sin 3t - \dfrac{27}{130}\cos 3t$

ЗАДАНИЕ 13

www.nstu.ucoz.ru

Решить систему уравнений с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} x' + 3x + 3y = e^{-t} \\ y' - y - x = 3e^{-t} \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$$

РЕШЕНИЕ

Пусть x(t)≓X(p), y(t)≓Y(p). Перейдём к системе операторных уравнений. По теореме о дифференцировании оригинала $x'(t) \risingdotseq pX(p)$, $y'(t) \risingdotseq pY(p)$, а по таблице $e^{-t} \risingdotseq \frac{1}{p+1}$. Получили систему уравнений в изображениях:

$$\begin{cases} X(p)[p+3] + 3Y(p) = \dfrac{1}{p+1} \\ -X(p) + Y(p)[p-1] = \dfrac{3}{p+1} \end{cases}$$ Умножим первое уравнение на p-1, а второе – на 3, затем вычтем из первого уравнения второе. Получим:

$X(p)(p-1)(p+3) + 3X(p) = \frac{p-1}{p+1} - \frac{9}{p+1} = \frac{p-1-9}{p+1}$ или $p(p+2)X(p) = \frac{p-10}{p+1}$. Тогда $X(p) = \frac{p-10}{p(p+2)(p+1)}$.

Разложим правую часть на простые множители:

$\frac{p-10}{p(p+2)(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2} = \frac{A(p+1)(p+2) + Bp(p+2) + Cp(p+1)}{p(p+1)(p+2)}$. Приравняем числители:

$A(p+1)(p+2) + Bp(p+2) + Cp(p+1) = p - 10$ полагая p=0, находим A=-5, при p=-1 получим B=11, при p=-2 находим C=-6. Таким образом, $X(p) = -5 \cdot \frac{1}{p} + 11 \cdot \frac{1}{p+1} - 6 \cdot \frac{1}{p+2}$. Следовательно,

$x(t) = -5 + 11e^{-t} - 6e^{-2t}$. Из первого уравнения ситемы следует, что $y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}x'(t) - x(t)$, т.е.

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}\left(-5 + 11e^{-t} - 6e^{-2t}\right)' + 5 - 11e^{-t} + 6e^{-2t} = 5 - 7e^{-t} + 2e^{-2t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} x(t) = -5 + 11e^{-t} - 6e^{-2t} \\ y(t) = 5 - 7e^{-t} + 2e^{-2t} \end{cases}$.

ЗАДАНИЕ 14

Операторным методом с применением интеграла Дюамеля найти токи $i_1(t)$ *и* $i_2(t)$ *в индуктивно связанных цепях (см. схему), вызвынных напряжением u(t). Параметры цепей:* L_1, L_2 (Гн), R_1, R_2 (Ом), M (Гн). *Начальные условия* $i_1(0) = 0, i_1(0) = 0$.

$$L_1 = 1,\ L_2 = \frac{4}{3},\ R_1 = \frac{3}{2},\ R_2 = 2,\ M = \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad u(t) = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi t}{2}, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ

Индуктивно связанные цепи описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} L_1 \dfrac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + M\dfrac{di_2}{dt} = u(t) \\ L_2 \dfrac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + M\dfrac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}$$ В данном случае $$\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{3}{2}i_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{di_2}{dt} = u(t) \\ \dfrac{4}{3}\dfrac{di_2}{dt} + 2i_2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}$$ Пусть u(t)≓U(p), $i_1(t) \risingdotseq I_1(p)$ и $i_2(t) \risingdotseq I_2(p)$. Тогда $\frac{di_1}{dt} \risingdotseq pI_1(p)$ и $\frac{di_2}{dt} \risingdotseq pI_2(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений

$$\begin{cases} pI_1(p)+\frac{3}{2}I_1(p)+\frac{1}{\sqrt{3}}pI_2(p)=U \\ \frac{4}{3}pI_2(p)+2I_2(p)+\frac{1}{\sqrt{3}}pI_1(p)=0 \end{cases}$$. Заменим функцию u(t) единичной функцией η(t), для которой

$\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$, и рассмотрим другую систему $\begin{cases} pX_1(p)+\frac{3}{2}X_1(p)+\frac{1}{\sqrt{3}}pX_2(p)=\frac{1}{p} \\ \frac{4}{3}pX_2(p)+2X_2(p)+\frac{1}{\sqrt{3}}pX_1(p)=0 \end{cases}$, в которой $X_1(p)$ и $X_2(p)$ – изображения некоторых функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Выразим $X_2(p)$ из второго уравнения $X_2(p)=-\frac{pX_1(p)}{\sqrt{3}(\frac{4}{3}p+2)}$ и подставим в первое. Получим:

$X_1(p)[p+\frac{3}{2}-\frac{p^2}{4p+6}]=\frac{1}{p}$ или $X_1(p)\frac{3(p^2+4p+3)}{2(2p+3)}=\frac{1}{p}$. Отсюда $X_1(p)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2p+3}{p(p^2+4p+3)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2p+3}{p(p+1)(p+3)}$.

Для обращения функции применим метод разложения дроби на простейшие дроби: $\frac{2}{3}\cdot\frac{2p+3}{p(p^2+4p+3)}=\frac{2}{3}\cdot(\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p+3})$. Или $A(p+1)(p+3)+Bp(p+3)+Cp(p+1)=2p+3$. Полагая p=0, находим A=1, полагая p=-1, находим B=-1/2, при p=-3, определяем C=-1/2. Тогда $X_1(p)=\frac{2}{3}\cdot(\frac{1}{p}-\frac{1}{2(p+1)}-\frac{1}{2(p+3)})=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+3}$. Следовательно, $x_1(t)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(e^{-t}+e^{-3t})$.

Изображение $I_1(p)$ связано с изображением $X_1(p)$ формулой $I_1(p) = pX_1(p)U(p)$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_1(0)=0$, получим: $i_1(t)=\int_0^t u(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$. Поскольку

$x_1'(t)=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(e^{-t}+e^{-3t})\right)'=\frac{1}{3}e^{-t}+e^{-3t}$, то при t<2

$$i_1(t)=\int_0^t \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot[\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)}+e^{-3(t-\tau)}]d\tau=\frac{1}{3}e^{-t}\int_0^t \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot e^{\tau}d\tau+e^{-3t}\int_0^t \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot e^{3\tau}d\tau=$$

$$=\frac{1}{3}e^{-t}\frac{e^{\tau}}{1+\pi^2/4}(\sin\frac{\pi\tau}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi\tau}{2})\Big|_0^t+e^{-3t}\frac{e^{3\tau}}{9+\pi^2/4}(3\sin\frac{\pi\tau}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi\tau}{2})\Big|_0^t=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\pi^2/4}(\sin\frac{\pi t}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2})+$$

$$+\frac{\pi}{6}\cdot\frac{e^{-t}}{1+\pi^2/4}+\frac{1}{9+\pi^2/4}(3\sin\frac{\pi t}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2})+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{-3t}}{9+\pi^2/4}.$$

При t≥2 получим:

$$i_1(t)=\int_0^2 \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot[\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)}+e^{-3(t-\tau)}]d\tau=\frac{1}{3}e^{-t}\int_0^2 \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot e^{\tau}d\tau+e^{-3t}\int_0^2 \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot e^{3\tau}d\tau=$$

$$=\frac{1}{3}e^{-t}\frac{e^{\tau}}{1+\pi^2/4}(\sin\frac{\pi\tau}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi\tau}{2})\Big|_0^2+e^{-3t}\frac{e^{\tau}}{9+\pi^2/4}(3\sin\frac{\pi\tau}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi\tau}{2})\Big|_0^2=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{e^{-t+2}}{1+\pi^2/4}+\frac{\pi}{6}\cdot\frac{e^{-t}}{1+\pi^2/4}+$$

$$+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{-3t+6}}{9+\pi^2/4}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{-3t}}{9+\pi^2/4}=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{1+\pi^2/4}(1+e^2)e^{-t}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{9+\pi^2/4}(1+e^6)e^{-3t}$$

Найдём $x_2(t)$:

$$X_2(p)=-\frac{pX_1(p)}{\sqrt{3}(\frac{4}{3}p+2)}=\frac{p}{\sqrt{3}(\frac{4}{3}p+2)}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2p+3}{p(p+1)(p+3)}=-\frac{1}{\sqrt{3}(p+1)(p+3)}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+3}),$$

т.е. $x_2(t)=-\frac{1}{2\sqrt{3}}(e^{-t}-e^{-3t})$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_2(0)=0$, получим:

www.nstu.ucoz.ru

$i_2(t)=\int_0^t u(\tau)x_2'(t-\tau)d\tau$. Поскольку $x_2'(t)=\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}(e^{-t}-e^{-3t})\right)'=\frac{1}{2\sqrt{3}}(e^{-t}-3e^{-3t})$, то при 0≤t<2

$$i_2(t)=\int_0^t \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}(e^{-(t-\tau)}-3e^{-3(t-\tau)})d\tau=\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-t}\int_0^t \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot e^{\tau}d\tau-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-3t}\int_0^t \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot e^{-3\tau}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-t}\frac{e^{\tau}}{1+\pi^2/4}(\sin\frac{\pi\tau}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi\tau}{2})\Big|_0^t-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-3t}\frac{e^{3\tau}}{9+\pi^2/4}(3\sin\frac{\pi\tau}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi\tau}{2})\Big|_0^t=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\pi^2/4}(\sin\frac{\pi t}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2})+\frac{\pi}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{e^{-t}}{1+\pi^2/4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{9+\pi^2/4}(3\sin\frac{\pi t}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2})+\frac{\pi\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{e^{-3t}}{9+\pi^2/4}$$

. При t≥2

$$i_2(t)=\int_0^2 \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}(e^{-(t-\tau)}-3e^{-3(t-\tau)})d\tau=\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-t}\int_0^2 \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot e^{\tau}d\tau-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-3t}\int_0^2 \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot e^{-3\tau}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-t}\frac{e^{\tau}}{1+\pi^2/4}(\sin\frac{\pi\tau}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi\tau}{2})\Big|_0^2-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-3t}\frac{e^{3\tau}}{9+\pi^2/4}(3\sin\frac{\pi\tau}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi\tau}{2})\Big|_0^2=$$

$$\frac{\pi}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{e^{-t+2}}{1+\pi^2/4}+\frac{\pi}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{e^{-t}}{1+\pi^2/4}-\frac{\pi\sqrt{3}}{4}\frac{e^{-3t+6}}{9+\pi^2/4}-\frac{\pi\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{e^{-3t}}{9+\pi^2/4}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} i_1(t)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\pi^2/4}(2\sin\frac{\pi t}{2}-\pi\cos\frac{\pi t}{2}+\pi\cdot e^{-t})+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9+\pi^2/4}(6\sin\frac{\pi t}{2}-\pi\cos\frac{\pi t}{2}+\pi\cdot e^{-3t}) \\ i_2(t)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\pi^2/4}(\sin\frac{\pi t}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2}\cdot e^{-t})-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{9+\pi^2/4}(3\sin\frac{\pi t}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2}\cdot e^{-3t}) \end{cases}$ при 0≤t<2 и $\begin{cases} i_1(t)=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{1+\pi^2/4}(1+e^2)e^{-t}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{9+\pi^2/4}(1+e^6)e^{-3t} \\ i_2(t)=\frac{\pi}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\pi^2/4}(1+e^2)e^{-t}-\frac{\pi\sqrt{3}}{4}\frac{1}{9+\pi^2/4}\left(1+e^6\right)e^{-3t} \end{cases}$ при t≥2.

ЗАДАНИЕ 15

Решить уравнение с переменными коэффициентами: $tx''-(2t+3)x'+(t+3)x=0$.

РЕШЕНИЕ

Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)$, $x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)$. Воспользуемся свойством дифференцирования изображения: $tf(t)\risingdotseq-\frac{d}{dp}F(p)$. В данном случае $tx(t)\risingdotseq-\frac{dX}{dp}$,

$tx'(t)\risingdotseq-\frac{d}{dp}\{pX-x(0)\}=-(X+p\frac{dX}{dp})$, $tx''\risingdotseq-\frac{d}{dp}\{p^2X-px(0)-x'(0)\}=-(2pX+p^2\frac{dX}{dp}-x(0))$. Учитывая это, получаем операторное уравнение: $-(2pX+p^2\frac{dX}{dp}-x(0))-3(pX-x(0))+2(X+p\frac{dX}{dp})-\frac{dX}{dp}+3X=0$.

Или $(-p^2+2p-1)\frac{dX}{dp}-5(p-1)X+4x(0)=-(p-1)^2\frac{dX}{dp}-5(p-1)X+4x(0)=0$. Таким образом, получилось линейное дифференциальное уравнение $\frac{dX}{dp}+\frac{5}{(p-1)}X=\frac{4x(0)}{(p-1)^2}$. Применим метод Бернулли.

Если $X(p)=U\cdot V$, то U и V определяются соответственно уравнениями:

$\frac{dU}{dp}+\frac{5}{(p-1)}U=0$; $UV'=\frac{4x(0)}{(p-1)^2}$. Таким образом, $\frac{dU}{U}=-\frac{5dp}{p-1}$; $\ln|U|=-5\ln|p-1|$; $U(p)=\frac{1}{(p-1)^5}$.

Подставим это во второе уравнение:

$\dfrac{V'}{(p-1)^5}=\dfrac{4x(0)}{(p-1)^2}$ или $V'=4x(0)(p-1)^3$. Тогда $V=x(0)(p-1)^4+C$. Следовательно,

$X(p)=\dfrac{x(0)(p-1)^4+C}{(p-1)^5}=\dfrac{x(0)}{p-1}+\dfrac{C}{4!}\cdot\dfrac{4!}{(p-1)^5}$. Переходя к оригиналу, получим $x(t)=e^t(x(0)+Ct^4)$.

ОТВЕТ: $x(t)=e^t(x(0)+Ct^4)$.

ЗАДАНИЕ 16

Решить операционным методом уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=x+y,\quad (x\le 0,\ y\ge 0),\quad u\big|_{x=0}=b,\ u\big|_{y=0}=0.$$

РЕШЕНИЕ

Пусть $u(x,y)\risingdotseq U(x,p)$. Тогда $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\risingdotseq pU(x,p)-u(x,0)=pU(x,p)$. Запишем операторное уравнение:

$\dfrac{dU}{dx}-pU=\dfrac{x}{p}+\dfrac{1}{p^2}$ или $\dfrac{dU}{dx}-pU=\dfrac{x}{p}+\dfrac{1}{p^2}$. Это линейное уравнение первого порядка. Его решение имеет вид: $U(x,p)=C(x,p)e^{px}$, где $C(x,p)$ – функция, определяемая из уравнения $C'(x,p)e^{px}=\dfrac{x}{p}+\dfrac{1}{p^2}$, т.е. $C(x,p)=\int(\dfrac{x}{p}+\dfrac{1}{p^2})e^{-px}dx=-(\dfrac{x}{p^2}+\dfrac{1}{p^3})e^{px}+C_1$. Следовательно, решением уравнения будет $U(x,p)=C(x,p)e^{px}=[-(\dfrac{x}{p^2}+\dfrac{1}{p^3})e^{-px}+C_1]e^{px}=-\dfrac{x}{p^2}-\dfrac{1}{p^3}+C_1e^{px}$. Пользуясь граничным условием $U(x,p)\big|_{x=0}=\dfrac{b}{p}$, найдём $C_1=\dfrac{b}{p}+\dfrac{1}{p}$. Следовательно,

$U(x,p)=-\dfrac{x}{p^2}-\dfrac{1}{p^3}+(\dfrac{b}{p}+\dfrac{1}{p^3})e^{px}$. Оригинал функции находим по таблицам:

$$u(x,y)=-xy-\frac{y^2}{2}+b\eta(y+x)+\frac{y^2}{2}\eta(y+x).$$

ОТВЕТ: $u(x,y)=-xy-\dfrac{y^2}{2}+b\eta(y+x)+\dfrac{y^2}{2}\eta(y+x)$