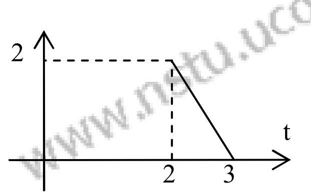
# ВАРИАНТ 19
## Задание 1-7

*Найти изображения и указать, какими теоремами пользовались:*

**1)** $f(t) = \operatorname{sh} 4t \cdot \operatorname{ch} 2t$; **2)** $f(t) = e^{2t}\sin t + \cos t$; **3)** $f(t) = \int\limits_0^t t\cos^2 t dt$; **4)** $f(t) = \eta(t-8)\cos 7(t-8)$;

**5)** $f(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^5 \sin 2\tau d\tau$; **6)**




**7)** $f(t) = (t^2 - 6t + 5)\eta(t-1)$.

РЕШЕНИЯ

**1)** $f(t) = \operatorname{sh} 4t \cdot \operatorname{ch} 2t$. Используем формулу для произведения гиперболических функций. Имеем: $\operatorname{sh} 4t \cdot \operatorname{ch} 2t = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sh} 2t + \operatorname{sh} 6t)$. По таблицам, $\operatorname{sh} 2t \fallingdotseq \dfrac{2}{p^2-4}$ и $\operatorname{sh} 4t \fallingdotseq \dfrac{6}{p^2-36}$. Далее, в силу свойства линейности, $\operatorname{sh} 4t \cdot \operatorname{ch} 2t \fallingdotseq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{p^2-4} + \dfrac{6}{p^2-36}\right) = \dfrac{4(p^2-12)}{(p^2-4)(p^2-36)}$.

<u>ОТВЕТ</u>: $\operatorname{sh} 4t \cdot \operatorname{ch} 2t \fallingdotseq \dfrac{4(p^2-12)}{(p^2-4)(p^2-36)}$.

**2)** $f(t) = e^{2t}\sin t + \cos t$ . По таблице находим $\cos t \fallingdotseq \dfrac{p}{p^2+1}$ и $\sin t \fallingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$. Применение теоремы смещения даёт: $e^{2t}\sin t \fallingdotseq \dfrac{1}{(p-2)^2+1}$ и, по свойству линейности получаем:

$$e^{2t} \cdot \sin t + \cos t \fallingdotseq \frac{1}{(p-2)^2+1} + \frac{p}{p^2+1} = \frac{p^2+1+p^3-4p^2+4p+p}{[(p-2)^2+1](p^2+1)} = \frac{p^3-3p^2+5p+1}{[(p-2)^2+1](p^2+1)}.$$

ОТВЕТ: $e^{2t} \cdot \sin t + \cos t \fallingdotseq \dfrac{p^3-3p^2+5p+1}{[(p-2)^2+1](p^2+1)}$.

**3)** $f(t) = \int\limits_0^t t\cos^2 t dt$.. Преобразуем подынтегральную функцию:

$t\sin^2 t = \dfrac{t}{2}(1+\cos 2t) = \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2} t\cos 2t$ . По таблице находим $\cos 2t \fallingdotseq \dfrac{p}{p^2+4}$. Применяя теорему о дифференцировании изображения, получим: $\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{p}{p^2+4}\right) \fallingdotseq -t \cdot \cos 2t$ . Следовательно,

$t \cdot \cos 2t \fallingdotseq -\dfrac{p^2+4-2p^2}{(p^2+4)^2} = \dfrac{p^2-4}{(p^2+4)^2}$. Так как $t \fallingdotseq \dfrac{1}{p^2}$, то с использованием свойства линейности, получим:

$\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2} t\cos 2t \fallingdotseq \dfrac{1}{2p^2} + \dfrac{p^2-4}{2(p^2+4)^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(p^2+4)^2 + p^2(p^2-4)}{p^2(p^2+4)^2} = \dfrac{p^4+2p^2+8}{p^2(p^2+4)^2} = \dfrac{(p^2+1)^2+7}{p^2(p^2+4)^2}$. По теореме интегрирования оригинала операции интегрирования оригинала соответствует деление изображения на p. Таким образом,

$$\int_0^t t\cos^2 t dt \risingdotseq \frac{1}{p}\cdot\frac{(p^2+1)^2+7}{p^2(p^2+4)^2}=\frac{(p^2+1)^2+7}{p^3(p^2+4)^2}.$$

ОТВЕТ: $\int_0^t t\sin^2 t dt \risingdotseq \frac{(p^2+1)^2+7}{p^3(p^2+4)^2}$.

**4)** $f(t)=\eta(t-8)\cos 7(t-8)$. По таблице $\cos 7t\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{p}{p^2+49}$. Согласно теореме запаздывания

$$\eta(t-8)\cdot\cos 7(t-8) \risingdotseq \frac{pe^{-8p}}{p^2+49}.$$

ОТВЕТ: $\eta(t-8)\cdot\cos 7(t-8) \risingdotseq \frac{pe^{-8p}}{p^2+49}$.

**5)** $f(t)=\int_0^t (t-\tau)^5\sin 2\tau d\tau$. Данный интеграл есть свёртка оригиналов $t^5$ и $\sin 2t$. Операции свёртки оригиналов соответствует умножение изображений. По таблице находим: $t^5 \risingdotseq \frac{5!}{p^6}$ и $\sin 2t \risingdotseq \frac{2}{p^2+4}$. Следовательно, $\int_0^t (t-\tau)^5\sin 2\tau d\tau \risingdotseq \frac{2\cdot 120}{p^6(p^2+4)}=\frac{240}{p^6(p^2+4)}$.

ОТВЕТ: $\int_0^t (t-\tau)^5\sin 2\tau d\tau \risingdotseq \frac{240}{p^6(p^2+4)}$.

**6)** Аналитическая запись функции имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<2,\\ 2(3-t), & 2\le t<3,\\ 0, & t\ge 3.\end{cases}$$

Применяя функцию Хевисайда, данную функцию можно представить следующим образом:

$f(t)=2(3-t)\cdot\eta(t-2)+2(t-3)\cdot\eta(t-3)=-2(t-2)\cdot\eta(t-2)+2\cdot\eta(t-2)+2(t-3)\cdot\eta(t-3)$.

Очевидно, что начиная с момента t=3 функция становится равной нулю. По таблице

$t\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2}$ и

$1\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$. Согласно теореме запаздывания $(t-2)\cdot\eta(t-2) \risingdotseq \frac{e^{-2p}}{p^2}$, $(t-3)\cdot\eta(t-3) \risingdotseq \frac{e^{-3p}}{p^2}$ и

$1\cdot\eta(t-2) \risingdotseq \frac{e^{-2p}}{p}$. По свойству линейности получим:

$$f(t) \risingdotseq \frac{-2e^{-2p}}{p^2}+\frac{2e^{-3p}}{p^2}+\frac{2e^{-2p}}{p}=2\frac{p-1+e^{-p}}{p^2}\cdot e^{-2p}.$$

ОТВЕТ: $f(t) \risingdotseq 2\frac{p-1+e^{-p}}{p^2}\cdot e^{-2p}$.

**7)** $f(t)=(t^2-6t+5)\eta(t-1)$. Разложим функцию $u(t)=t^2-6t+5$ по степеням (t-1), пользуясь формулой Тейлора ($t_0$=1): $u(t)=u(t_0)+u'(t_0)(t-t_0)+\frac{u''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$. Имеем: $u'(t)=2t-6$, $u''(t)=2$, $u'(1)=-4$, u(1)=0. Тогда $u(t)=-4(t-1)+(t-1)^2$. Окончательно получаем:

$f(t)=u(t)\cdot\eta(t-1)=[-4(t-1)+(t-1)^2]\cdot\eta(t-1)$. ). По таблице $t\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p^2}$ и $t^2\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{2}{p^3}$. Согласно теореме запаздывания $(t-1)\cdot\eta(t-1)\risingdotseq\frac{e^{-p}}{p^2}$ и $(t-1)^2\cdot\eta(t-1)\risingdotseq\frac{2e^{-p}}{p^3}$. Применим свойство линейности: $f(t)\risingdotseq\frac{-4e^{-p}}{p^2}+\frac{2e^{-p}}{p^3}=(\frac{2}{p^3}-\frac{4}{p^2})\cdot e^{-p}$.

ОТВЕТ: $f(t)\risingdotseq(\frac{2}{p^3}-\frac{4}{p^2})\cdot e^{-p}$.

## ЗАДАНИЕ 8

*Найти оригинал по изображению, используя свойства преобразования Лапласа:*

$$F(p)=\frac{d}{dp}\left(\frac{8}{(p-1)^2-16}\right).$$

РЕШЕНИЕ

Наличие слагаемого $(p-1)^2$ в сумме $(p-1)^2-16$, стоящей в знаменателе, говорит о том, что синус имеет смещение, т.е. нужно воспользоваться формулой $e^{\lambda p}\operatorname{sh} wt\risingdotseq\frac{w}{(p-\lambda)^2-w^2}$.

Действительно, $\frac{8}{(p-1)^2-16}=2\frac{4}{(p-1)^2-4^2}\risingdotseq 2e^t\operatorname{sh}4t$. По теореме о дифференцировании изображения имеем: $\frac{d}{dp}\left(\frac{8}{(p-1)^2-16}\right)\risingdotseq -2te^t\operatorname{sh}4t$.

ОТВЕТ: $\frac{d}{dp}\left(\frac{8}{(p-1)^2-16}\right)\risingdotseq -2te^t\operatorname{sh}4t$.

## ЗАДАНИЕ 9

*Найти оригинал с помощью вычетов:*

$$F(p)=\frac{1}{p^3-2p^2+17p}.$$

РЕШЕНИЕ

Для отыскания f(t) нужно найти сумму вычетов функции $F(p)\cdot e^{pt}$ во всех особых точках F(p). Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p(p^2-2p+17)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=1-4i$, $p_3=1+4i$. Все корни являются простыми полюсами для функции F(p). Для простого полюса справедливо следующее: если $\Phi(p)=\frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, а $p_0$ является простым полюсом Φ(p), то вычет можно вычислить по формуле $\operatorname*{res}_{p_0}\Phi(p)=\frac{\varphi(p_0)}{\psi'(p_0)}$.

В данном случае $\varphi(p)=e^{pt}$, $\psi(p)=p(p^2-2p+17)$ и $\psi'(p)=3p^2-4p+17$. Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=\frac{1}{17}\ ,\quad \operatorname*{res}_{p=1-4i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(1-4i)}{\psi'(1-4i)}=\frac{e^{(1-4i)t}}{3(1-4i)^2-4(1-4i)+17}=-\frac{e^{(1-4i)t}}{8(i+4)},$$

$$\operatorname*{res}_{p=1+4i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(1+4i)}{\psi'(1+4i)}=\frac{e^{(1+4i)t}}{3(1+4i)^2-4(1+4i)+17}=-\frac{e^{(1+4i)t}}{8(i-4)}.$$ Просуммируем все вычеты:

$$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]+\operatorname*{res}_{p=1-4i}[F(p)\cdot e^{pt}]+\operatorname*{res}_{p=1+4i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{1}{17}+\frac{1}{8}\left(-\frac{e^{-4it}}{i+4}+\frac{e^{4it}}{i-4}\right)e^t=$$

$$=\frac{1}{17}-\frac{1}{8}\cdot\frac{-e^{-4it}(i-4)+e^{4it}(i+4)}{17}\cdot e^t=\frac{1}{17}-\frac{1}{68}(i\cdot sh(4it)+4ch(4it))\cdot e^t=$$

$$=\frac{1}{17}-\frac{1}{68}(4\cos 4t-\sin 4t)\cdot e^t.$$ Здесь учтено, что cos(t)=ch(it), а sin(t)=−i·sh(it).

ОТВЕТ: $\dfrac{1}{p^3-2p^2+17p}\risingdotseq\dfrac{1}{17}-\dfrac{1}{68}(4\cos 4t-\sin 4t)\cdot e^t$.

## ЗАДАНИЕ 10

*Найти оригинал, произведя разложение рациональной дроби на элементарные:*

$$F(p)=\frac{-4e^{-4p}}{(p-2)(p+1)^2}.$$

РЕШЕНИЕ

Разложим функцию $\Phi(p)=\dfrac{-4}{(p-2)(p+1)^2}$ на простые дроби. Корнями знаменателя являются $p_1=2$, $p_2=-1$, причём корень $p_2=-1$ имеет кратность 2.

Следовательно, разложение имеет вид: $\dfrac{-4}{(p-2)(p+1)^2}=\dfrac{A}{p-2}+\dfrac{B}{p+1}+\dfrac{C}{(p+1)^2}$.

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим:

$$\frac{-4}{(p-2)(p+1)^2}=\frac{A(p+1)^2+B(p-2)(p+1)+C(p-2)}{(p-2)(p+1)^2}.$$

Знаменатели в обеих частях равны, следовательно, равны и числители: $A(p+1)^2+B(p-2)(p+1)+C(p-2)=-4$. Придавая последовательно переменной p значения корней, найдём коэффициенты разложения A и C. Полагая p=2, получим A=-4/9, при p=-1 получим C=4/3. Приравнивая коэффициенты при $p^2$ в левой и правой частях равенства, найдём B: A+B=0 или B=-A=4/9. Таким образом,

$$\frac{-4}{(p-2)(p+1)^2}=-\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(p+1)^2}.$$

Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим:

$\dfrac{-4}{(p-2)(p+1)^2}\risingdotseq-\dfrac{4}{9}e^{2t}+\dfrac{4}{9}\cdot e^{-t}+\dfrac{4}{3}t\cdot e^{-t}$. Зная оригинал для Ф(p), можно найти оригинал для Ф(p)$e^{-4p}$, опираясь на теорему запаздывания: $\dfrac{-4e^{-4p}}{(p-2)(p+1)^2}\risingdotseq-\dfrac{4}{9}e^{2(t-4)}+\dfrac{4}{9}\cdot e^{-(t-4)}+\dfrac{4}{3}(t-4)\cdot e^{-(t-4)}$

. Или $\dfrac{-4e^{-4p}}{(p-2)(p+1)^2}\risingdotseq-\dfrac{4}{9}e^{2(t-4)}+[\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{3}(t-4)]\cdot e^{-(t-4)}=\dfrac{4(3t-11)}{9}\cdot e^{-(t-4)}-\dfrac{4}{9}e^{2(t-4)}$

ОТВЕТ: $\dfrac{-4e^{-4p}}{(p-2)(p+1)^2}\risingdotseq\dfrac{4(3t-11)}{9}\cdot e^{-(t-4)}-\dfrac{4}{9}e^{2(t-4)}$.

## ЗАДАНИЯ 11, 12

Решить дифференциальные уравнения операционным методом:

**11.** $x'' + x' - 6x = -\mathrm{sh}2t, \quad x(0) = 0, x'(0) = -1$ **;** **12.** $x'' - x' - 2x = 12\sin 2t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0$ **.**

РЕШЕНИЯ.

**11.** $x'' + x' - 6x = -\mathrm{sh}2t, \quad x(0) = 0, x'(0) = -1$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \risingdotseq X(p)$, то $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p)$,

$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1$. По таблице $-\mathrm{sh}2t \risingdotseq -\dfrac{2}{p^2-4}$. Получаем операторное

уравнение $p^2X(p) + pX(p) - 6X(p) + 1 = -\dfrac{2}{p^2-4}$ или $X(p)[p^2 + p - 6] = -\dfrac{2}{p^2-4} - 1$. Тогда

$X(p) = \dfrac{2-p^2}{(p^2-4)[p^2+p-6]} = \dfrac{2-p^2}{(p+2)(p-2)^2(p+3)}$. Применим метод разложения на простые дроби:

$\dfrac{2-p^2}{(p+2)(p-2)^2(p+3)} = \dfrac{A}{p+2} + \dfrac{B}{p+3} + \dfrac{C}{p-2} + \dfrac{D}{(p-2)^2}$. Отсюда

$2 - p^2 = A(p+3)(p-2)^2 + B(p+2)(p-2)^2 + C(p+2)(p+3)(p-2) + D(p+2)(p+3)$. Если p=-2, то

$A = -\dfrac{1}{8}$, при $p = -3$ получим $B = \dfrac{7}{25}$, при $p = 2$ получим $D = -\dfrac{1}{10}$. Для определения C

приравняем коэффициенты при $p^3$: A+B+C=0. Отсюда $C = -\dfrac{31}{200}$. Таким образом,

$X(p) = -\dfrac{1}{8(p+2)} + \dfrac{7}{25(p+3)} - \dfrac{31}{200(p-2)} - \dfrac{1}{10(p-2)^2}$. Пользуясь формулой $t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$ и теоремой

смещения $t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \dfrac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$, получим: $x(t) = \dfrac{7}{25}e^{-3t} - \dfrac{1}{8}e^{-2t} - \dfrac{1}{200}(20t+31)e^{2t}$.

ОТВЕТ: $x(t) = \dfrac{7}{25}e^{-3t} - \dfrac{1}{8}e^{-2t} - \dfrac{1}{200}(20t+31)e^{2t}$.

**12.** $x'' - x' - 2x = 12\sin 2t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0$**.** Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \risingdotseq X(p)$, то $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p)$,

$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p)$. По таблице $12\sin 2t \risingdotseq \dfrac{24}{p^2+4}$. Получаем операторное

уравнение $p^2X(p) - pX(p) - 2X(p) = \dfrac{24}{p^2+4}$ или $X(p)[p^2 - p - 2] = \dfrac{24}{p^2+4}$. Тогда

$X(p) = \dfrac{24}{(p+1)(p^2+4)(p-2)}$. Применим метод разложения на простые дроби:

$\dfrac{24}{(p+1)(p^2+4)(p-2)} = \dfrac{A}{p+1} + \dfrac{B}{p-2} + \dfrac{Cp+D}{p^2+4}$. Отсюда

$24 = A(p-2)(p^2+4) + B(p+1)(p^2+4) + (Cp+D)(p+1)(p-2)$. Если p=-1, то

$A = -\dfrac{8}{5}$, при $p = 2$ получим $B = 1$. Для определения C приравняем коэффициенты при $p^3$:

A+B+C=0. Отсюда $C = \dfrac{3}{5}$. Для определения D приравняем коэффициенты при $p^2$:

-2A+B-C+D=0. Отсюда $D = -\dfrac{18}{5}$. Таким образом,

$\dfrac{24}{(p+1)(p^2+4)(p-2)} = -\dfrac{8}{5}\cdot\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{p-2} + \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{p}{p^2+4} - \dfrac{9}{5}\cdot\dfrac{2}{p^2+4}$. Следовательно,

$x(t) = e^{2t} - \dfrac{8}{5}e^{-t} - \dfrac{9}{5}\sin 2t + \dfrac{3}{5}\cos 2t$.

ОТВЕТ: $x(t) = e^{2t} - \frac{8}{5}e^{-t} - \frac{9}{5}\sin 2t + \frac{3}{5}\cos 2t$.

## ЗАДАНИЕ 13

*Решить систему уравнений с заданными начальными условиями:*

$$\begin{cases} x' - 3x - 3y = 2e^{3t} \\ y' - 2y - 2x = 2e^{-t} \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$$

### РЕШЕНИЕ

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений. По теореме о дифференцировании оригинала $x'(t) \risingdotseq pX(p)$, $y'(t) \risingdotseq pY(p)$, а по таблице $e^{-t} \risingdotseq \frac{1}{p+1}$ и

$e^{3t} \risingdotseq \frac{1}{p-3}$. Получили систему уравнений в изображениях:

$$\begin{cases} X(p)[p-3] - 3Y(p) = \dfrac{2}{p-3} \\ -2X(p) + Y(p)[p-2] = \dfrac{2}{p+1} \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на p-2, а второе – на 3, затем сложим их. Получим:

$$X(p)(p-2)(p-3) - 6X(p) = \frac{2(p-2)}{p-3} + \frac{6}{p+1} = \frac{2(p^2-p-2)+6p-18}{(p+1)(p-3)} \quad \text{или} \quad p(p-5)X(p) = \frac{2(p^2+2p-11)}{(p+1)(p-3)}.$$

Тогда $X(p) = \frac{2(p^2+2p-11)}{p(p-5)(p+1)(p-3)}$. Разложим правую часть на простые множители:

$$\frac{2(p^2+2p-11)}{p(p-5)(p+1)(p-3)} =$$

$$= \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p-3} + \frac{D}{p-5} = \frac{A(p+1)(p-3)(p-5) + Bp(p-3)(p-5) + Cp(p+1)(p-5) + Dp(p+1)(p-3)}{p(p+1)(p-3)(p-5)}.$$

Приравняем числители:

$A(p+1)(p-3)(p-5) + Bp(p-3)(p-5) + Cp(p+1)(p-5) + Dp(p+1)(p-3) = 2(p^2+2p-11)$ полагая p=0, находим A=-22/15, при p=-1 получим B=1, при p=3 находим C=-1/3, при p=5 находим D=4/5. Таким образом, $X(p) = -\frac{22}{15}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p-3} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{p-5}$. Следовательно,

$x(t) = -\frac{22}{15} + e^{-t} - \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{5t}$. Из первого уравнения ситемы следует, что

$y(t) = \frac{1}{3}x'(t) - x(t) - \frac{2}{3}e^{3t}$, т.е.

$$y(t) = \frac{1}{3}\left(-\frac{22}{15} + e^{-t} - \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{5t}\right)' + \frac{22}{15} - e^{-t} + \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{4}{5}e^{5t} - \frac{2}{3}e^{3t} = \frac{22}{15} - \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{3t} + \frac{8}{15}e^{5t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} x(t) = -\dfrac{22}{15} + e^{-t} - \dfrac{1}{3}e^{3t} + \dfrac{4}{5}e^{5t} \\ y(t) = \dfrac{22}{15} - \dfrac{4}{3}e^{-t} - \dfrac{2}{3}e^{3t} + \dfrac{8}{15}e^{5t} \end{cases}$.

## ЗАДАНИЕ 14

*Операторным методом с применением интеграла Дюамеля найти токи* $i_1(t)$ и $i_2(t)$ *в индуктивно связанных цепях (см. схему), вызвынных напряжением u(t). Параметры цепей:* $L_1, L_2$ (Гн), $R_1, R_2$ (Ом), $M$ (Гн). *Начальные условия* $i_1(0) = 0, i_1(0) = 0$.

$L_1=1,\ L_2=\frac{4}{3},\ R_1=\frac{3}{2},\ R_2=2,\ M=\frac{1}{\sqrt{3}};\qquad u(t)=\begin{cases}40t, & 0\le t<1\\ 40(2-t), & 1\le t<2\\ 0, & t\ge 2\end{cases}$

РЕШЕНИЕ

Индуктивно связанные цепи описываются следующей системой уравнений:

$\begin{cases}L_1\frac{di_1}{dt}+R_1i_1+M\frac{di_2}{dt}=u(t)\\ L_2\frac{di_2}{dt}+R_2i_2+M\frac{di_1}{dt}=0\end{cases}$ В данном случае $\begin{cases}\frac{di_1}{dt}+\frac{3}{2}i_1+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{di_2}{dt}=u(t)\\ \frac{4}{3}\frac{di_2}{dt}+2i_2+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{di_1}{dt}=0\end{cases}$ Пусть $u(t)\risingdotseq U(p)$,

$i_1(t)\risingdotseq I_1(p)$ и $i_2(t)\risingdotseq I_2(p)$. Тогда $\frac{di_1}{dt}\risingdotseq pI_1(p)$ и $\frac{di_2}{dt}\risingdotseq pI_2(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений $\begin{cases}pI_1(p)+\frac{3}{2}I_1(p)+\frac{1}{\sqrt{3}}pI_2(p)=U\\ \frac{4}{3}pI_2(p)+2I_2(p)+\frac{1}{\sqrt{3}}pI_1(p)=0\end{cases}$. Заменим функцию u(t) единичной функцией η(t), для которой $\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p}$, и рассмотрим другую систему $\begin{cases}pX_1(p)+\frac{3}{2}X_1(p)+\frac{1}{\sqrt{3}}pX_2(p)=\frac{1}{p}\\ \frac{4}{3}pX_2(p)+2X_2(p)+\frac{1}{\sqrt{3}}pX_1(p)=0\end{cases}$, в которой $X_1(p)$ и $X_2(p)$ – изображения некоторых функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Выразим $X_2(p)$ из второго уравнения $X_2(p)=-\frac{pX_1(p)}{\sqrt{3}(\frac{4}{3}p+2)}$ и подставим в первое. Получим:

$X_1(p)[p+\frac{3}{2}-\frac{p^2}{4p+6}]=\frac{1}{p}$ или $X_1(p)\frac{3(p^2+4p+3)}{2(2p+3)}=\frac{1}{p}$. Отсюда

$X_1(p)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2p+3}{p(p^2+4p+3)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2p+3}{p(p+1)(p+3)}$. Для обращения функции применим метод разложения дроби на простейшие дроби: $\frac{2}{3}\cdot\frac{2p+3}{p(p^2+4p+3)}=\frac{2}{3}\cdot(\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p+3})$. Или

$A(p+1)(p+3)+Bp(p+3)+Cp(p+1)=2p+3$. Полагая p=0, находим A=1, полагая p=-1, находим B=-1/2, при p=-3, определяем C=-1/2. Тогда

$X_1(p)=\frac{2}{3}\cdot(\frac{1}{p}-\frac{1}{2(p+1)}-\frac{1}{2(p+3)})=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+3}$. Следовательно, $x_1(t)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(e^{-t}+e^{-3t})$.

Изображение $I_1(p)$ связано с изображением $X_1(p)$ формулой $I_1(p)=pX_1(p)U(p)$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_1(0)=0$, получим: $i_1(t)=\int_0^t u(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$. Поскольку

$x_1'(t)=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(e^{-t}+e^{-3t})\right)'=\frac{1}{3}e^{-t}+e^{-3t}$, то при t<1

$$i_1(t)=\int_0^t 40\tau\cdot[\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)}+e^{-3(t-\tau)}]d\tau=\frac{40}{3}e^{-t}\cdot(\tau-1)e^{\tau}\Big|_0^t+40e^{-3t}(\frac{\tau}{3}-\frac{1}{9})e^{3\tau}\Big|_0^t=\frac{80}{3}t-\frac{160}{9}+\frac{40}{3}e^{-t}+\frac{40}{9}e^{-3t}.$$

При 1≤t<2 получим:

$$i_1(t)=\int_0^1 40\tau\cdot[\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)}+e^{-3(t-\tau)}]d\tau+\int_1^t 40(2-\tau)\cdot[\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)}+e^{-3(t-\tau)}]d\tau=\frac{40}{3}e^{-t}\cdot(\tau-1)e^{\tau}\Big|_0^1+40e^{-3t}(\frac{\tau}{3}-\frac{1}{9})e^{3\tau}\Big|_0^1+$$

$$+[\frac{80}{3}e^{-(t-\tau)}+\frac{80}{3}e^{-3(t-\tau)}]\Big|_1^t-\frac{40}{3}e^{-t}\cdot(\tau-1)e^{\tau}\Big|_1^t-40e^{-3t}(\frac{\tau}{3}-\frac{1}{9})e^{3\tau}\Big|_1^t=\frac{40}{3}e^{-t}+\frac{80}{9}e^{-3t+3}+\frac{40}{9}e^{-3t}+$$

$$+\frac{160}{3}-\frac{80}{3}e^{-t+1}-\frac{80}{3}e^{-3t+3}-\frac{40t}{3}+\frac{40}{3}-\frac{40t}{3}+\frac{40}{9}-\frac{80}{9}e^{-3t+3}=\frac{640}{9}-\frac{80}{3}t-\frac{40}{3}(2e-1)e^{-t}-\frac{40}{3}(2e^3-1)e^{-3t}.$$

При $t\geq2$

$$i_1(t)=\int_0^1 40\tau\cdot[\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)}+e^{-3(t-\tau)}]d\tau+\int_1^2 40(2-\tau)\cdot[\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)}+e^{-3(t-\tau)}]d\tau=\frac{40}{3}e^{-t}\cdot(\tau-1)e^{\tau}\Big|_0^1+40e^{-3t}(\frac{\tau}{3}-\frac{1}{9})e^{3\tau}\Big|_0^1+$$

$$+[\frac{80}{3}e^{-(t-\tau)}+\frac{80}{3}e^{-3(t-\tau)}]\Big|_1^2-\frac{40}{3}e^{-t}\cdot(\tau-1)e^{\tau}\Big|_1^2-40e^{-3t}(\frac{\tau}{3}-\frac{1}{9})e^{3\tau}\Big|_1^2=\frac{40}{3}(e-1)^2e^{-t}+\frac{40}{9}(e^3-1)^2e^{-3t}$$

Найдём $x_2(t)$:

$$X_2(p)=-\frac{pX_1(p)}{\sqrt{3}(\frac{4}{3}p+2)}=\frac{p}{\sqrt{3}(\frac{4}{3}p+2)}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2p+3}{p(p+1)(p+3)}=-\frac{1}{\sqrt{3}(p+1)(p+3)}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+3}),$$

т.е. $x_2(t)=-\frac{1}{2\sqrt{3}}(e^{-t}-e^{-3t})$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_2(0)=0$, получим: $i_2(t)=\int_0^t u(\tau)x_2'(t-\tau)d\tau$. Поскольку $x_2'(t)=\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}(e^{-t}-e^{-3t})\right)'=\frac{1}{2\sqrt{3}}(e^{-t}-3e^{-3t})$, то при $0\leq t<1$

$$i_2(t)=\int_0^t 40\tau\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}(e^{-(t-\tau)}-3e^{-3(t-\tau)})d\tau=\frac{20}{\sqrt{3}}e^{-t}\cdot(\tau-1)e^{\tau}\Big|_0^t-20\sqrt{3}e^{-3t}(\frac{\tau}{3}-\frac{1}{9})e^{3\tau}\Big|_0^t=\frac{20}{\sqrt{3}}t-\frac{20}{\sqrt{3}}+\frac{20}{\sqrt{3}}e^{-t}-\frac{20}{\sqrt{3}}t+$$

$$+\frac{20}{3\sqrt{3}}-\frac{20}{3\sqrt{3}}e^{-3t}=-\frac{40}{3\sqrt{3}}+\frac{20}{\sqrt{3}}e^{-t}-\frac{20}{3\sqrt{3}}e^{-3t}.$$ При $1\leq t<2$

$$i_2(t)=\int_0^1 40\tau\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}[e^{-(t-\tau)}-3e^{-3(t-\tau)}]d\tau+\int_1^t 40(2-\tau)\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}[e^{-(t-\tau)}-3e^{-3(t-\tau)}]d\tau=\frac{20}{\sqrt{3}}e^{-t}\cdot(\tau-1)e^{\tau}\Big|_0^1-$$

$$-20\sqrt{3}e^{-3t}(\frac{\tau}{3}-\frac{1}{9})e^{3\tau}\Big|_0^1+[\frac{40}{\sqrt{3}}e^{-(t-\tau)}-\frac{40}{\sqrt{3}}e^{-3(t-\tau)}]\Big|_1^t-\frac{20}{\sqrt{3}}e^{-t}\cdot(\tau-1)e^{\tau}\Big|_1^t+20\sqrt{3}e^{-3t}(\frac{\tau}{3}-\frac{1}{9})e^{3\tau}\Big|_1^t=$$

$$=\frac{40}{3\sqrt{3}}-\frac{20}{\sqrt{3}}(2e-1)e^{-t}-\frac{20}{3\sqrt{3}}(2e^3-1)e^{-3t}.$$ При $t\geq2$

$$i_2(t)=\int_0^1 40\tau\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}[e^{-(t-\tau)}-3e^{-3(t-\tau)}]d\tau+\int_1^2 40(2-\tau)\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}[e^{-(t-\tau)}-3e^{-3(t-\tau)}]d\tau=\frac{20}{\sqrt{3}}e^{-t}\cdot(\tau-1)e^{\tau}\Big|_0^1-$$

$$-20\sqrt{3}e^{-3t}(\frac{\tau}{3}-\frac{1}{9})e^{3\tau}\Big|_0^1+[\frac{40}{\sqrt{3}}e^{-(t-\tau)}-\frac{40}{\sqrt{3}}e^{-3(t-\tau)}]\Big|_1^2-\frac{20}{\sqrt{3}}e^{-t}\cdot(\tau-1)e^{\tau}\Big|_1^2+20\sqrt{3}e^{-3t}(\frac{\tau}{3}-\frac{1}{9})e^{3\tau}\Big|_1^2=$$

$$=\frac{20}{\sqrt{3}}(e-1)^2e^{-t}+\frac{20}{3\sqrt{3}}(e^3-1)^2e^{-3t}$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} i_1(t)=\frac{80}{3}t-\frac{160}{9}+\frac{40}{3}e^{-t}+\frac{40}{9}e^{-3t} \\ i_2(t)=-\frac{40}{3\sqrt{3}}+\frac{20}{\sqrt{3}}e^{-t}-\frac{20}{3\sqrt{3}}e^{-3t} \end{cases}$ при $0\le t<1$,

$\begin{cases} i_1(t)=\frac{640}{9}-\frac{80}{3}t-\frac{40}{3}(2e-1)e^{-t}-\frac{40}{3}(2e^3-1)e^{-3t} \\ i_2(t)=\frac{40}{3\sqrt{3}}-\frac{20}{\sqrt{3}}(2e-1)e^{-t}-\frac{20}{3\sqrt{3}}(2e^3-1)e^{-3t} \end{cases}$ при $1\le t<2$ и

$\begin{cases} i_1(t)=\frac{40}{3}(e-1)^2e^{-t}+\frac{40}{9}(e^3-1)^2e^{-3t} \\ i_2(t)=\frac{20}{\sqrt{3}}(e-1)^2e^{-t}+\frac{20}{3\sqrt{3}}(e^3-1)^2e^{-3t} \end{cases}$ при $t\ge 2$.

## ЗАДАНИЕ 15

*Решить уравнение с переменными коэффициентами*: $tx''-2(t+1)x'+(t+2)x=0.$

РЕШЕНИЕ

Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)$, $x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)$. Воспользуемся свойством дифференцирования изображения: $tf(t)\risingdotseq -\frac{d}{dp}F(p)$. В данном случае $tx(t)\risingdotseq -\frac{dX}{dp}$,

$tx'(t)\risingdotseq -\frac{d}{dp}\{pX-x(0)\}=-(X+p\frac{dX}{dp})$, $tx''\risingdotseq -\frac{d}{dp}\{p^2X-px(0)-x'(0)\}=-(2pX+p^2\frac{dX}{dp}-x(0))$. Учитывая это, получаем операторное уравнение:

$-(2pX+p^2\frac{dX}{dp}-x(0))-2(pX-x(0))+2(X+p\frac{dX}{dp})-\frac{dX}{dp}+2X=0$. Или

$(-p^2+2p-1)\frac{dX}{dp}-4(p-1)X+3x(0)=-(p-1)^2\frac{dX}{dp}-4(p-1)X+3x(0)=0$. Таким образом, получилось линейное дифференциальное уравнение $\frac{dX}{dp}+\frac{4}{(p-1)}X=\frac{3x(0)}{(p-1)^2}$. Применим метод Бернулли.

Если $X(p)=U\cdot V$, то U и V определяются соответственно уравнениями:

$\frac{dU}{dp}+\frac{4}{(p-1)}U=0;\quad UV'=\frac{3x(0)}{(p-1)^2}$. Таким образом, $\frac{dU}{U}=-\frac{4dp}{p-1};\quad \ln|U|=-4\ln|p-1|;\quad U(p)=\frac{1}{(p-1)^4}$.

Подставим это во второе уравнение:

$\frac{V'}{(p-1)^4}=\frac{3x(0)}{(p-1)^2}$ или $V'=3x(0)(p-1)^2$. Тогда $V=x(0)(p-1)^3+C$. Следовательно,

$X(p)=\frac{x(0)(p-1)^3+C}{(p-1)^4}=\frac{x(0)}{p-1}+\frac{C}{6}\cdot\frac{6}{(p-1)^4}$ Переходя к оригиналу, получим $x(t)=e^t(x(0)+Ct^3)$.

ОТВЕТ: $x(t)=e^t(x(0)+Ct^3)$.

## ЗАДАНИЕ 16

*Решить операционным методом уравнение в частных производных*:

$\frac{\partial u}{\partial y}-\cos y\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x\cos y,\quad x>0,\ y>0,\quad u|_{x=0}=\sin y.$

РЕШЕНИЕ

Пусть $u(x,y) \risingdotseq U(p,y)$. Тогда $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} \risingdotseq pU(p,y) - u(0,y) = pU(p,y) - \sin y$. Запишем операторное уравнение:

$\dfrac{dU}{dy} - \cos y(pU - \sin y) = \dfrac{p\cos y}{p^2+1}$ или $\dfrac{dU}{dy} - p\cos y \cdot U = \dfrac{p\cos y}{p^2+1} - \sin y \cdot \cos y$. Это линейное уравнение первого порядка. Его решение имеет вид: $U(p,y) = C(p,y)e^{p\sin y}$, где C(p,y) – функция, определяемая из уравнения $C'(p,y)e^{p\sin y} = \dfrac{p\cos y}{p^2+1} - \sin y \cdot \cos y$, т.е.

$C(p,y) = \int (\dfrac{p\cos y}{p^2+1} - \sin y \cdot \cos y)e^{-p\sin y}dy = \int (\dfrac{p}{p^2+1} - \sin y)e^{-p\sin y}d\sin x = -[\dfrac{1}{p^2+1} - \dfrac{p\sin y+1}{p^2}]e^{-p\sin y} + C_1$.

Следовательно, решением уравнения будет

$U(p,y) = C(p,y)e^{p\sin y} = [-(\dfrac{1}{p^2+1} - \dfrac{p\sin y+1}{p^2})e^{-p\sin y} + C_1]e^{p\sin y} = -(\dfrac{1}{p^2+1} - \dfrac{p\sin y+1}{p^2}) + C_1e^{p\sin y}$. По свойству изображений Лапласа $U(x,p) \to 0$ при $p \to \infty$. Это возможно только тогда, когда $C_1$=0. Таким образом, $U(p,y) = -(\dfrac{1}{p^2+1} - \dfrac{p\sin y+1}{p^2})$. Пользуясь таблицами, находим

$u(x,y) = -\sin x + \sin y + x$.

ОТВЕТ: $u(x,y) = x + \sin y - \sin x$.